G. ENESCU

FIZICA
pentru
TEHNICIENI

*

EDITURA TEHNICĂ

CUPRINS

1. Introducere . . . . . .

1.1. Mărime fizică. Măsurare 7
1.2. Relaţii între mărimi 9
1.3. Mărini fundamentale, mărimi derivate 10
1.4. Sisteme de unităţi de măsură 11
1.5. Sistemul Internaţional de unităţi de măsură 12
1.6. Relaţii adaptate 14
1.7. Procedee de măsurare şi unităţi pentru mărimile mecanice fundamentale 15
1.8. Scalari şi vectori 24
1.9. Reprezentarea elementelor unui vector 25
1.10. Compunerea (însumarea) mărimilor vectoriale 26
1.11. Înmulţimea unui vector cu un scalar 28

2. Statica 29

2.1. Compunerea forţelor concurente 30
2.2. Descompunerea forţelor după suporturi concurente 32
2.3. Momentul unei forţe în raport cu un punct 34
2.4. Sisteme de forţe în echilibru 37
2.5. Aplicaţii 38
2.6. Echilibrul corpurilor în cîmpul gravitaţional 42
2.7. Maşini simple 45

3. Cinematica 55

3.1. Definirea mişcării şi repausului 55
3.2. Mişcarea de rotaţie, mişcarea de translaţie 56
3.3. Ce este un mobil? 57
3.4. Descrierea mişcării 58
3.5. Viteza unui mobil 59
3.6. Acceleraţia 62
3.7. Mişcare rectilinie uniformă 64
3.8. Mişcarea rectilinie uniform variată 66
3.9. Aplicaţii 67
3.10. Mişcarea circulară uniformă 69
3.11. Aplicaţie. Raportul de transmisie 72
3.12. Acceleraţia unghiulară. Mişcarea circulară uniform variată 73

4. **Dinamica** 75

4.1. Legea întîi (legea inerției) 75
4.2. Legea a doua a dinamicii 76
4.3. Legea a treia a dinamicii 78
4.4. Tipuri de forțe 79
4.5. Legea a doua aplicată într-un sistem neinerțial 93
4.6. Dinamica mișcării circulare 96
4.7. Aplicații tehnice ale dinamicii mișcării circulare 98
4.8. Energia mecanică 99

5. **Oscilații și unde** 123

5.1. Oscilații mecanice 123
5.2. Unde mecanice 154

6. **Statica fluidelor** 217

6.1. Presiunea 217
6.2. Presiunea atmosferică 218
6.3. Presiunea într-un fluid 219
6.4. Aparate de măsură a presiunii 221
6.5. Principiul lui Arhimede 224
6.6. Aplicații 224
6.7. Densitatea și greutatea specifică 226
6.8. Densimetre 227

7. **Dinamica fluidelor** 228

7.1. Fluidul ideal 228
7.2. Ecuația de continuitate 229
7.3. Ecuația lui Bernoulli 229
7.4. Aplicații 231
7.5. Fluidul real 233

8. **Procese termice** 243

8.1. Noțiunea de temperatură 243
8.2. Mijloace de măsurare a temperaturii 245
8.3. Dilatația solidelor și lichidelor 247
8.4. Căldura și lucrul mecanic 250
8.5. Căldura specifică. Capacitatea calorică 251
8.5. Transferul căldurii 253
8.7. Starea unui sistem, schimbare de stare 255
8.8. Căldurile specifice la volum și presiunea constantă 260
8.9. Calculul lucrului mecanic efectuat de un gaz ideal 262
8.10. Primul principiu al termodinamicii 262
8.11. Aplicații ale primului principiu al termodinamicii 264
8.12. Puterea calorică a unui combustibil 266
8.13. Obținerea temperaturilor joase 268
8.14. Gazul real 269
8.15. Teoria cinetico-moleculară a gazului ideal 270
8.16. Structura substanței 272
8.17. Schimbare de fază 274
8.18. Principiul doi al termodinamicii 284
8.19. Motorul cu ardere internă 287

1

INTRODUCERE

1.1. Mărime fizică. Măsurare

Descrierea proceselor fizice se face cu ajutorul mărimilor fizice care denumesc anumite proprietăți ale lumii materiale, proprietăți care pot fi măsurate. Ca știință, fizica își propune nu numai să descrie calitativ fenomenele ci mai ales să măsoare proprietățile, putînd astfel să exprime cantitativ legile care descriu legătura dintre mărimi.

Nu toate științele operează exclusiv cu mărimi (proprietăți măsurabile). De exemplu, facultăți psihice ca inteligența, memoria, sau senzații, cum este mirosul, studiate de psihologie, nu constituie mărimi. Tendința modernă a oricărei științe este de a încerca să descrie cantitativ procesele de care se ocupă.

În esență, a măsura o mărime înseamnă a o compara cu o mărime de aceeași specie care este aleasă ca unitate de măsură. Această comparare nu se poate face nemijlocit decît pentru anumite mărimi cum sînt, de exemplu, lungimea, masa etc. Aceste mărimi sînt direct măsurabile. Pentru alte mărimi cum ar fi energia, temperatura, sarcina electrică operația se face indirect, măsurîndu-se alte mărimi cu care acestea sînt corelate în diferite definiții, legi, teoreme.

Exemple 1. Pentru a măsura un segment AB (fig. 1.1.) îl comparăm cu un alt segment MN, arbitrar ales, pe care îl considerăm *unitate de măsură*. Operația comportă așezarea cap la cap de un număr de ori, care poate fi întreg sau fracționar, a segmentului MN peste segmentul AB, începînd cu o extremitate a acestuia. Rezultatul acestui experiment poate fi scris sub forma

$$\frac{AB}{MN} = a$$

a este *valoarea* lungimii AB în raport cu unitatea $MN = u$. Segmentul de lungime u este în această operație o *măsură*.

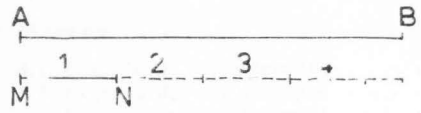


Fig. 1.1. Măsura este cuprinsă în segmentul AB de 4,5 ori: 4,5 este valoarea lungimii AB în raport cu unitatea MN. Se compară o lungime cu o altă lungime.

2. Pentru a măsura temperatura unui corp se folosește un termometru. După realizarea echilibrului termic coloana de mercur are o anumită lungime, iar valoarea temperaturii citită pe scară rezultă indirect deoarece nu se compară direct temperatura cu o altă temperatură luată ca unitate ci se măsoară lungimea coloanei cu un segment — unitate de coloană de mercur corespunzător variației temperaturii cu un grad. Temperatura arătată de termometrul din figura 1.2 este 36°C. Se observă din exemplele date că măsurarea unei mărimi este o operație experimentală, un experiment de fizică.

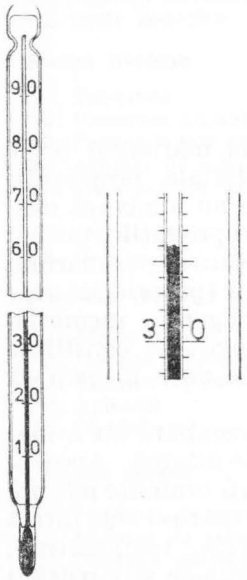


Fig. 1.2. Lungimea coloanei de mercur este de 36 de ori lungimea coloanei corespunzătoare variației cu un grad. Temperatura este măsurată indirect.

În general, mărimea fizică M raportată la unitatea u dă valoarea m

$$\frac{M}{u} = m \qquad (1.1)$$

adică: *mărimea fizică = valoarea × unitatea de măsură*.

Se înțelege că dacă unitatea de măsură se schimbă, se modifică și valoarea mărimii. De exemplu, rezultatul măsurării cu unitatea metrul dă, pentru lungimea unei camere, valoarea 3,45. Măsurînd lungimea aceleeași camere cu centimetrul se găsește valoarea 345; deci folosind o unitate de 100 ori mai mică valoarea măsurată este de o sută de ori mai mare, fapt pe care îl explică relația 1.1. Măsurarea unei mărimi poate fi influențată de mărimea de măsurat, de metoda utilizată, de instrumentele cu care se execută și chiar de operatorul care o efectuează.

Precizia exprimă în limbajul metrologilor exactitatea cu care se face o măsurare. Ea este apreciată prin eroarea cu care se face măsurarea.

Exemple 1. Măsurînd lungimea unei camere cu metrul care este divizat în centimetri, rezultatul poate fi citit cu o precizie de 1 cm de exemplu $l = 3{,}45\ \text{m} \pm 1$ cm. Aceasta înseamnă că ultima cifră este nesigură.

2. Dacă se măsoară dimensiunile unui geam pentru a fi montat într-o ramă este necesar să se aleagă o riglă gradată în milimetri, precizia fiind astfel un milimetru. Rezultatul dat de măsurătoare este de exemplu exprimat prin 0,456 m $\pm$ 1 mm aceasta înseamnă că ultima cifră este nesigură. Rezultatul ar putea fi 0,455 sau 0,456 m.

Pentru diferite operații preciziile exprimate pot fi, sau nu, admisibile. De exemplu, pentru normarea unui zugrav măsurarea dimensiunilor unei camere cu precizia exprimată de ± 1 cm este bună, dar pentru tăierea geamului aceeași precizie ar fi insuficientă deoarece la o diferență de ± 1 cm geamul nu ar mai intra sau nu ar mai putea fi prins de ramă. De asemenea, măsurarea camerei cu precizia de ± 1 mm ar fi, pentru scopul arătat, inutilă.

Uneori precizia măsurătorii nu se scrie sub forma 3,45 m $\pm$ 1 cm, omițîndu-se ± 1 cm, dar înțelegîndu-se că ultima cifră din rezultatul 3,45 m este nesigură.

Precizia unei măsurători rezultă din metodele și instrumentele folosite care sînt alese deci în funcție de precizia cerută, prezentată adesea ca toleranță necesară.

Există o limită în precizia cu care se face oricare măsurătoare în funcție de instrumentele și metodele folosite și chiar de deprinderea de a măsura a operatorului.

De pildă, în exemplul 1, dacă la măsurarea camerei, în cursul suprapunerii instrumentului peste segmentul de măsurat operația nu se face cu suficientă atenție, din vina celui ce măsoară, precizia exprimată prin ± 1 cm care arată că lungimea camerei ar putea fi considerată sigură între 3,44 m și 3,46, este exagerată.

Mărimile de măsurat se măsoară cu mijloacele de măsurare. Acestea sînt de două feluri: măsurile și aparatele de măsurat sau instrumentele de măsurat:

a) măsura materializează unitatea de măsură. Exemple: panglica, ruleta, rigla, piatra de cîntărire;

b) aparatul de măsurat este construit în vederea comparării directe sau indirecte a mărimii de măsurat cu unitatea de măsură. *Exemple*: șublerul, micrometrul, contorul, cronometrul.

Problemele legate de măsurarea concretă a unei anumite mărimi fizice vor fi analizate în §1.7.

1.2. Relații între mărimi

În fizică, pe cale inductiv-experimentală sau prin metode deductive (teoretic) se cercetează corelațiile dintre diferitele proprietăți, legăturile dintre fenomene. Aceste corelații se concretizează în relații cantitative între mărimi. Relațiile între mărimi au un grad de generalitate diferit. Cele mai generale relații sînt *legile fizice* la care se ajunge pe cale inductiv-experimentală. O categorie de legi sînt *legile generale*. În relația prin care se exprimă o lege generală apar exclusiv

mărimi care nu depind de natura particulară a corpurilor care intervin. Din aceste legi se deduc pe cale teoretică teoremele. Experienţa este un criteriu de verificare atît pentru teoreme cît şi pentru legile generale din care provin acestea. Experienţa este deci determinantă pentru a decide dacă relaţiile descoperite sînt valabile sau nu.

Exemplu. Între forţa $\vec{F}$ care acţionează asupra unui punct material de masă m şi acceleraţia $\vec{a}$ imprimată punctului există relaţia

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Mărimile înscrise în această relaţie nu sînt legate în nici un fel de natura corpurilor care sînt implicate în interacţiune. Este o lege generală numită legea fundamentală a dinamicii.

O categorie specială de legi cuprinde *legile de material* în care intervin mărimi caracteristice numai anumitor materiale. La aceste legi, se ajunge tot pe cale experimentală şi au un domeniu de aplicabilitate restrîns exclusiv la materialele pentru care s-au efectuat determinările de laborator.

Exemplu. Rezistenţa este o caracteristică a unei porţiuni de circuit. Studiindu-se dependenţa acestei mărimi de geometria şi natura unui conductor omogen, se induce experimental relaţia

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

unde l şi S sînt, respectiv, lungimea şi secţiunea conductorului. Rezistivitatea ρ este o mărime care depinde de materialul din care este fabricat conductorul.

1.3. Mărimi fundamentale, mărimi derivate

Deoarece între mărimi există diferite relaţii care descriu cantitativ corelaţia care există în natură, unele mărimi pot fi definite prin altele. În orice subdomeniu al fizicii se poate alege un număr de cîteva mărimi numite *fundamentele* în funcţie de care se definesc toate celelalte mărimi numite, din acest motiv, *derivate*. De exemplu, în mecanică toate mărimile se pot defini pe baza a trei mărimi fundamentale : lungimea l, masa m şi timpul t.

Mărimile fundamentale se definesc nemijlocit arătîndu-se : a) procedeul de măsurare şi b) unitatea de măsură. Unităţile de măsură ale mărimilor fundamentale se numesc unităţi fundamentale.

Pentru definirea unei mărimi derivate se foloseşte relaţia de definiţie, iar unitatea rezultă din această relaţie. În acest fel toate unităţile, cu excepţia celor fundamentale, se deduc din acestea din urmă.

Exemplu. În mişcarea uniformă viteza se defineşte ca un cît de mărimi fundamentale prin relaţia

$$v = \frac{l}{t} \left(\text{sau dimensional } [v] = \frac{[L]}{[T]} \right).$$

Din această relaţie de definiţie rezultă unitatea : considerînd ca unităţi fundamentale corespunzătoare metrul şi secunda se obţine unitatea derivată

$$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ (sau } \text{m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}.$$

Schimbînd însă unităţile fundamentale prin km şi h se obţine o altă unitate derivată

$$[v] = \frac{\text{km}}{\text{h}} \text{ (sau } \text{km} \cdot \text{h}^{-1}\text{)}.$$

1.4. Sisteme de unităţi de măsură

Prin alegerea unui grup de unităţi fundamentale se alcătuieşte în mod corespunzător un *sistem de unităţi de măsură*. Un sistem de unităţi este format din unităţile fundamentale şi unităţile derivate din acestea.

Se înţelege că se pot imagina multe sisteme de unităţi, luînd cîte un grup de unităţi fundamentale. În practică au fost şi sînt încă folosite multe unităţi de măsură chiar pentru aceleaşi mărimi. Situaţia existentă are cauze diverse. În primul rînd trebuie să se aibă în vedere că necesitatea măsurării a apărut de multă vreme în mod independent la diferite popoare, în diferite locuri pe glob. Astfel, e firesc ca mijloacele de măsurare şi unităţile de măsură utilizate să fi fost atît de diverse.

Atîta timp cît schimbul de mărfuri era limitat la pieţe locale, lipsa de corelare între unităţi nu a deranjat. De îndată ce s-au creat pieţele naţionale şi apoi s-a lărgit schimbul pe plan internaţional, diversitatea mijloacelor de măsurări şi a unităţilor, a provocat dificultăţi mari în schimburile de mărfuri, de informaţii ştiinţifice şi tehnice.

Începînd cu secolul al XVI-lea s-a pus mereu problema unificării-unităţilor de măsură, mai întîi pe plan naţional, şi apoi pe plan internaţional. În 1875, 17 state au semnat „Convenţia metrului“ simul-

tan, luînd ființă și primul Birou Internațional de Măsuri și Greutăți, laborator de cercetări în domeniul metrologiei, ramură a tehnicii care se ocupă cu problemele măsurării și mijloacelor de măsurare.

Întrucît mijloacele de măsurare și unitățile utilizate sînt în strînsă legătură cu nevoile speciale ale științei și tehnicii au apărut cîteva sisteme de unități. În afara acestora se utilizează o mulțime de alte unități care nu aparțin nici unui sistem. Motivele arătate mai înainte au determinat noi eforturi pentru găsirea unui sistem practic de unități de măsură susceptibil a fi aplicat în toate țările semnatare ale Convenției metrului. În anul 1960 s-a hotărît adoptarea Sistemului Internațional de unități de măsură (SI). Acest sistem are de pe acum o largă aplicabilitate, fiind utilizat în peste 120 de țări. România, țară semnatară în 1883 a Convenției metrului, a adoptat SI în 1961*. Unitățile SI se utilizează în conformitate cu STAS 737 din 1961. În țara noastră, ca și pe plan internațional, se mai utilizează legal, dar nu obligatoriu, unele unități de măsură exterioare Sistemului Internațional. Standardul de stat 9446—80 reglementează folosirea și data pînă la care se mai pot utiliza aceste unități, în cazul în care întrebuințarea lor este limitată în timp.

1.5. Sistemul Internațional de unități de măsură**

Acest sistem definește trei clase de unități: fundamentale, derivate și suplimentare. Tabelul următor conține unitățile fundamentale.

Domeniul	Mărimea	Unitatea	Simbol
mecanică	lungime	metru	m
	masă	kilogram	kg
	timp	secundă	s
electricitate	intensitate a curentului electric	amper	A
termodinamică	temperatură termodinamică	kelvin	K
	cantitate de substanță	mol	mol
optică	intensitate luminoasă	candelă	cd

* Începînd cu data de 31 august 1961, SI este singurul sistem de unități legal și obligatoriu din țara noastră (HCM nr. 550 din 31 VII 1961).

** A se vedea și Sistemul Internațional de unități, Editura didactică și pedagogică, București, 1982, lucrare elaborată de Biroul Internațional de Măsuri și Greutăți, în care se sintetizează istoricul și se dau definițiile unităților fundamentale și ale celor derivate simbolurile și regulile de scriere. Prezenta carte este pusă în concordanță cu această lucrare.

Definițiile, procedeele de măsurare ale tuturor unităților fundamentale se vor expune în paragraful 1.6.

Pe baza celor șapte mărimi fundamentale se definesc alte mărimi și unități.

Există un număr de mărimi în legătură cu care nu s-a decis încă apartenența lor la una din clasele de mai sus. Tabelul următor conține aceste mărimi împreună cu unitățile corespunzătoare:

Mărimea	Denumirea	Simbolul
unghi plan	radian	rad
unghi solid	steradian	sr
viteza unghiulară	radian pe secundă	rad/s
accelerație unghiulară	radian pe secundă la pătrat	rad/s^2
intensitate energetică	watt pe steradian	W/sr
luminanța energetică	watt pe metru pătrat-steradian	$W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$

Multiplii zecimali ai unităților se formează în mod sistematic și unitar cu ajutorul prefixelor date în tabelul următor:

Factor de multiplicare	10^{-18}	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	Unitatea	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}	10^{15}	10^{18}
Prefix	atto	femto	pico	nano	micro	mili	centi	deci		deca	hecto	kilo	mega	giga	tera	peta	exa
Simbolul prefixului	a	f	p	n	μ	m	c	d		da	ha	k	M	G	T	P	E

Exemple. 1. 1 n F (nanofarad) = 10^{-9}F

prefixul | unitatea

2. 1 k N (kilonewton) = 10^{3}N

prefixul | unitatea

În capitolul 6 vor mai fi întîlnite cîteva unităţi din afara SI, utile în tehnică şi în viaţa cotidiană.

1.6. Relaţii adaptate

Foarte frecvent în tehnică se folosesc relaţii în care intervin mărimi care nu sînt măsurate cu unităţi din acelaşi sistem. Din acest motiv în legile fizice apar coeficienţi paraziţi. Două exemple ne lămuresc.

1. Relaţia între puterea P a unui motor care dezvoltă o forţă F constantă pe o distanţă d în timpul t este

$$P = \frac{F \cdot d}{t}$$

dacă toate mărimile sînt măsurate într-un sistem coerent de unităţi, de pildă în SI în care puterea se exprimă în waţi ; dar dacă, aşa cum se mai obişnuieşte şi astăzi, puterea se măsoară în cal-putere (CP)

$$1 \text{ CP} = 736 \text{ W}$$

relaţia de mai sus se scrie

$$P[\text{CP}] = \frac{F[\text{N}] \cdot d[\text{m}]}{736 \cdot t[\text{s}]}$$

sau

$$P = \frac{F \cdot d}{736 \cdot t} \text{ [CP]},$$

ceea ce înseamnă că dacă se exprimă în dreapta toate mărimile în SI, pentru a se obţine puterea în CP este necesar să se împartă cu 736.

2. Legea fundamentală a dinamicii se scrie în SI sub forma

$$F = ma,$$

dar dacă se exprimă forţa în kilogram-forţă (kgf)

$$1 \text{ kgf} = 9{,}8 \text{ N}$$

relaţia se scrie

$$F = 9{,}8\ ma[\text{kgf}]$$

cu semnificaţia că exprimînd masa în kilograme şi acceleraţia în m/s² este necesar să se înmulţească valoarea cu 9,8 pentru a exprima forţa în kgf.

Relaţiile adaptate sînt utilizate mai ales datorită tradiţiei încă puternic manifestată de a exprima anumite mărimi în unităţi din afara sistemelor de unităţi.

1.7. Procedee de măsurare şi unităţi pentru mărimile mecanice fundamentale*

1.7.1. Măsurarea lungimii

Pentru măsurarea unei anumite lungimi se compară aceasta cu o anumită măsură. Măsura materializează unitatea. Orice măsură este realizată prin comparaţie cu un *etalon*. Un etalon al unităţii de lungime este metrul etalon. Construirea etalonului de lungime se face pe baza definiţiei date unităţii. Metrul este lungimea egală cu 1650763,73 lungimi de undă ale radiaţiei corespunzătoare tranziţiei între nivelele $2p_{10}$ şi $5d_5$ ale atomului de kripton-86**. Definiţia reflectă preocuparea de a reproduce oricînd etalonul cît mai exact pe baza unui proces natural invariabil. Ea dă posibilitatea verificării permanente a lungimii la 0°C dintre cele două repere trasate pe prototipul (reprodus în figura 1.3) construit în 1889*** şi care este o bară fabricată dintr-un aliaj de platină (90%) şi iridiu (10%). Simbolul metrului este m.

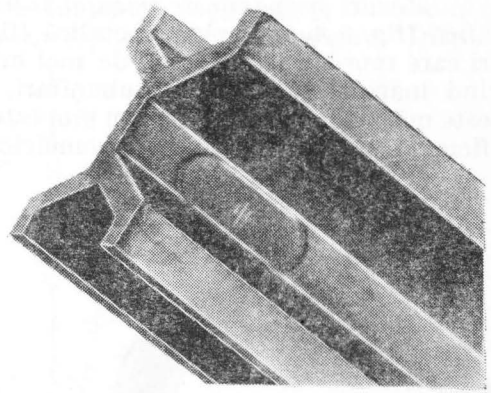


Fig. 1.3. Un capăt al metrului etalon. Forma aleasă împiedică încovoierea, iar aliajul din care e construit reduce acţiunea corozivă.

* O lucrare care se ocupă pe larg de această categorie de probleme este : M. Oncescu : *Mărimi şi unităţi în fizică*, vol. I, Ed. tehnică, Bucureşti, 1958.

** La tranziţia unui electron între două nivele energetice a căror diferenţă de energie este E, atomul emite o radiaţie electromagnetică de frecvenţă ν. Relaţia dintre E şi ν este $E = h\nu$, în care $h \approx 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J·s. Unda electromagnetică se propagă în vid cu viteza $c = 3 \cdot 10^8$ km/s, lungimea de undă fiind λ_0, $\lambda_0 = c/\nu$.

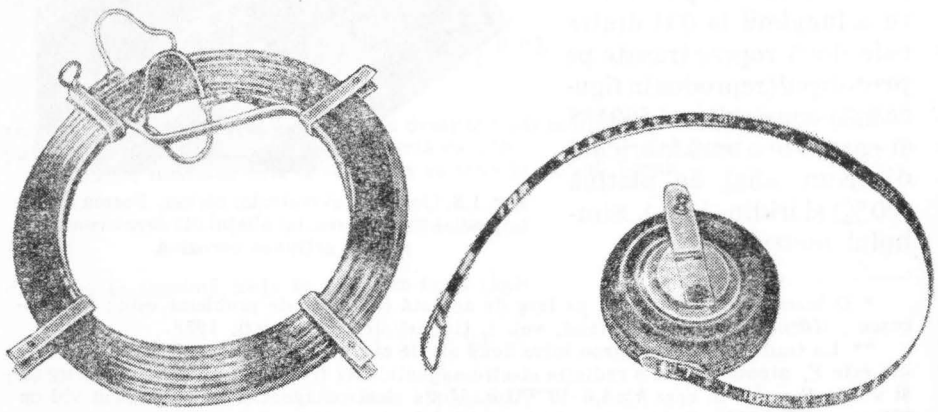
*** România are copia cu numărul 6_0 atribuită în 1895 de Conferinţa Generală de Măsuri şi Greutăţi.

În tabelul următor sînt înscrise ordinele de mărime pentru cîteva distanțe măsurate prin diferite metode.

Distanța	Lungimi [m]	Distanța	Lungimi [m]
Diametrul Galaxiei din care face parte sistemul Solar	$4 \cdot 10^{22}$	Everestul	$8{,}5 \cdot 10^{3}$
		Înălțimea unui om	$1{,}7 \cdot 10^{0}$
Cea mai apropiată stea (α din constelația Centaurul)	$4{,}3 \cdot 10^{16}$	Grosimea unei lame de ras	$3 \cdot 10^{-4}$
		Diametrul unei molecule	10^{-9}
Diametrul orbitei Pămîntului	$3 \cdot 10^{11}$	Diametrul unui atom de H	$0{,}5 \cdot 10^{-10}$
Diametrul Pămîntului	$12{,}7 \cdot 10^{6}$	Diametrul unui nucleu de H	10^{-15}

Măsurile și instrumentele de măsură pentru lungime sînt diferite în funcție de obiectele care trebuie măsurate. Ele se clasifică în două categorii: a) măsuri și aparate de măsurat lungimea cu repere și b) măsuri terminale.

a) *Măsuri și aparate de măsurat și trasat cu repere.* Panglica topografică (fig. 1.4, a), ruleta metalică (fig. 1.4, b) și riglele sînt măsuri care reproduc o dată sau de mai multe ori unitatea de lungime avînd marcați și multiplii subunitari. În măsurările efectuate cu aceste măsuri precizia de cm sau mm este tot ceea ce se poate obține, suficientă pentru măsurări topometrice, de zidărie, croitorie etc.



1.4. Panglica topografică și ruleta metalică.

În alte operații, această precizie devine total insuficientă. De exemplu, determinarea diametrului cămășii unui cilindru, al lungimii unui bolț etc. trebuie să se facă cu o toleranță de cîteva zecimi sau sutimi de mm. Instrumentele care pot efectua astfel de măsurători au atașat un vernier sau un șurub micrometric, dispozitive care dau posibilitatea citirii unor dimensiuni cu precizia cerută de toleranțe de acest ordin.

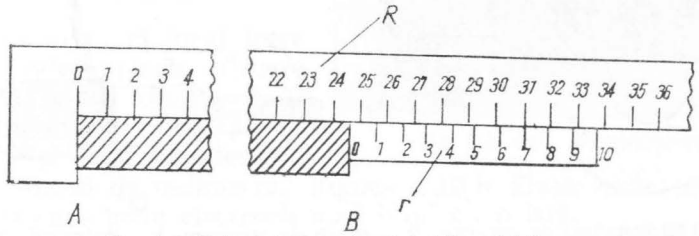


Fig. 1.5. Principiul vernierului $AB = 24{,}7$ mm.

Vernierul (fig. 1.5) Se atașează riglei instrumentului (R), gradată în milimetri, o rigletă (r) de 9 mm divizată în 10 părți. Presupunem că diviziunea zero (0) a rigletei se află între diviziunea 24 și 25 de pe riglă, ne interesează cît este lungimea $24(R) - 0(r)$. Observăm că diviziunile 31 de pe (R) și 7 de pe (r) se află în prelungire. Întrucît un interval de pe rigletă este de 9/10 mm = 0,9 mm, el este cu 1 — 0,9 = 0,1 mm mai mic decît un interval de pe riglă. Coincidența făcîndu-se pentru diviziunea 7 urmează că diviziunea 6 este în avans față de 30 cu 0,1 mm, 5 față de 29 cu $0{,}1 \cdot 2$ mm = 0,2 mm ș.a.m.d. O fiind în avans față de 24 cu $7 \cdot 0{,}1$ mm = = 0,7 mm. Citirea este deci $AB = 24{,}7$ mm.

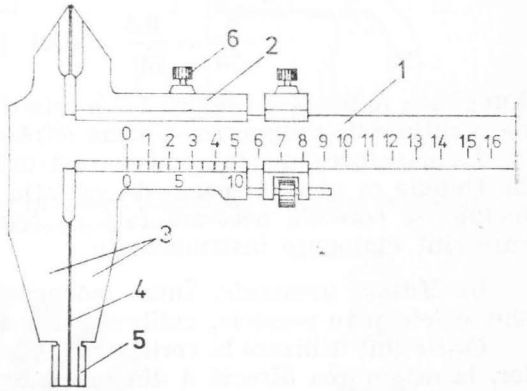


Fig. 1.6. Șublerul de exterior și de interior: *1* — riglă; *2* — cursor; *3* — ciocuri lungi; *4* — *5* suprafețe de măsurare pentru măsurări exterioare și, respectiv, pentru măsurări interioare; *6* — șurub de blocare.

Există verniere cu precizie de 1/20, 1/50, în funcție de numărul de diviziuni egale. Între aparatele cu vernier *șublerul* este cel mai cunoscut. În figura 1.6 este desenat șublerul de interior și exterior.

Șurubul micrometric este folosit pentru măsurarea lungimilor prin transformarea mișcării lui de rotație în mișcare liniară. La o

rotație completă șurubul se deplasează cu un pas p. Deci deplasarea liniară l este direct proporțională cu unghiul de rotire α (exprimat în grade)

$$l = p \cdot \frac{\alpha}{360}.$$

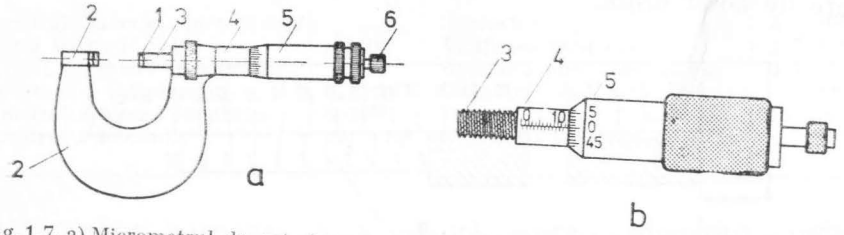


Fig. 1.7. a) Micrometrul de exterior; *1* — șurub de strîngere, *2* — potcoavă, *3* — șurub micrometric, *4* — braț cilindric, *5* — tambur, *6* — suprafețe de măsurare. b) brațul cilindric este divizat în 0.5 mm. Diviziunile scărilor sînt intercalate.

Un astfel de mecanism este partea principală a micrometrului (fig. 1.7, *a*). Pasul filetului *3* este de 0,5 mm. Pe partea conică *5* sînt trasate 50 de repere la intervale egale (fig. 17, b). Astfel, o diviziune de pe tambur corespunde la

$$\frac{p}{50} = \frac{0{,}5}{50} = 0{,}01 \text{ [mm]}.$$

Lungimea indicată pe figura 1.7,b este $d = 12{,}00$ mm, precizia fiind de o sutime de milimetru. Ultima cifră este nesigură.

La măsurarea unei lungimi cu o măsură sau cu un instrument metalic trebuie să se țină seama de variația lungimii ei cu temperatura făcîndu-se corecția necesară față de temperatura camerei (20°C), la care sînt etalonate instrumentele.

b) *Măsuri terminale.* Între măsurile numite astfel, importante sînt calele plan-paralele, calibrele și sondele.

Calele sînt utilizate la verificarea aparatelor de precizie, a calibrelor, la măsurarea directă a dimensiunilor pieselor, la lucrări de trasaj etc.

Fiecare cală plan-paralelă este construită pentru o dimensiune care se înscrie pe placă (fig. 1.8). În vederea realizării unor anumite lungimi se folosesc combinații de mai multe cale de dimensiuni nominale diferite.

Calibrele sînt destinate să limiteze abaterile pieselor de serie de la dimensiunile proiectate și de la forma dorită. În figura 1.9 sînt prezentate două tipuri de calibre.

Se observă că există (fig. 1.9, a) două poziții, una „trece" (T) și alta „nu trece" (NT) cu dimensiuni admise în toleranțele permise. O piesă cilindrică, de exemplu, este verificată de cele două părți așa cum arată figura 1.9,b.

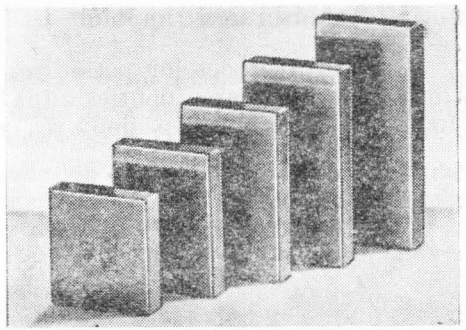


Fig. 1.8. Cale plan-paralele.

Sondele măsoară jocul între două suprafețe plane. Fiecare lamă din trusă (fig. 1.10, a) are o anumită grosime variind între 0,05 și 1 mm cu diferența de 1—5 sutimi de milimetru. Figura 1.10,b arată cum se poate sonda distanța între electrozii unei bujii cu o leră.

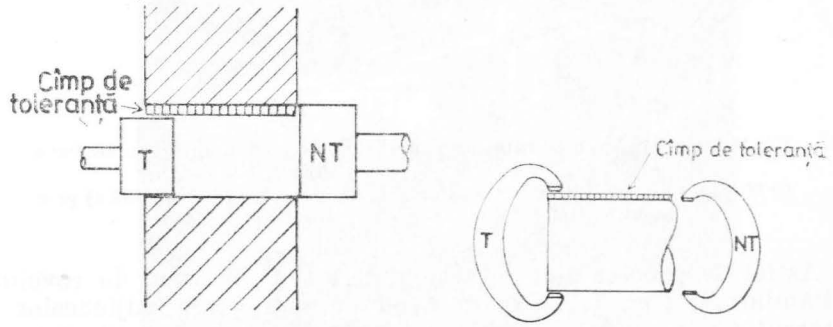


Fig. 1.9. a) Verificarea unui alezaj cu calibru tampon, b) Verificarea unui arbore cu calibru potcoavă.

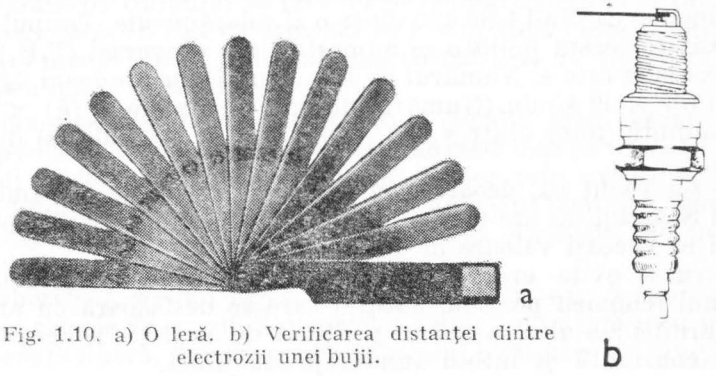


Fig. 1.10. a) O leră. b) Verificarea distanței dintre electrozii unei bujii.

1.7.2. Măsurarea timpului

Existența proceselor periodice, adică a proceselor care se repetă identic (sau aproape identic) după un interval de timp, face posibilă măsurarea timpului și definirea etalonului corespunzător.

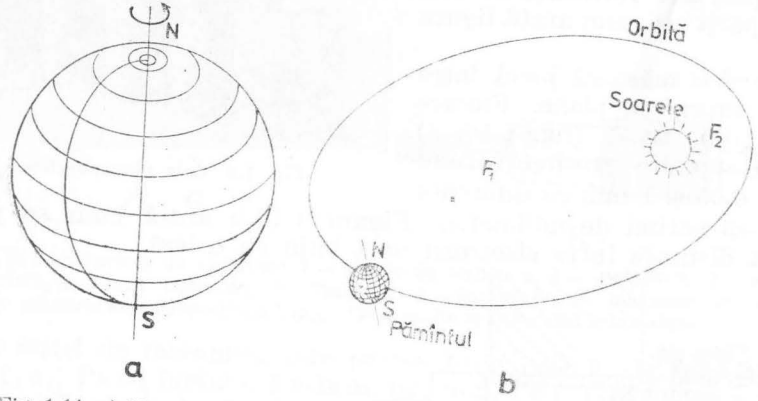


Fig. 1.11. a) Mișcarea de rotație a Pămîntului se face în medie în 86 400 s ($N-S$, axa polilor).
b) Mișcarea de revoluție a Pămîntului se face într-un an (365·86 400 s) pe o orbită eliptică avînd Soarele în unul dintre focare.

Astfel de procese sînt rotația diurnă sau mișcarea de revoluție a Pămîntului (fig. 1.11). O dată cu perfecționarea mijloacelor de observație s-au putut evidenția neregularitățile acestor mișcări ceea ce a determinat redefinirea repetată a etalonului de timp.

De exemplu, durata unei zile este variabilă în cursul unui an. Dar luîndu-se în considerare o zi solară medie, s-a definit secunda (solară medie) ca fiind 1/86 400 dintr-o zi solară medie. Timpul măsurat folosind această unitate se numește timp universal (T.U.). Simbolul secundei este s. Numărul 86 400 rezultă din produsul 24 h/d × ×60 min/h × 60 s/min. (Numărul de ore (h) dintr-o zi (d) × numărul de minute (min) dintr-o oră × numărul de secunde (s) dintr-un minut.)

Dar s-a văzut că, deoarece mișcarea de revoluție a Pămîntului în jurul Soarelui nu are mereu aceeași durată, ziua solară medie nu are nici ea aceeași valoare în doi ani diferiți.

Pentru a evita erorile provenite din alegerea unui etalon pe baza unui fenomen periodic natural care se desfășoară cu anumite neregularități s-a ales ca etalon perioada de oscilație a unui sistem, riguros constantă și întotdeauna reproductibilă.

Începînd cu 1967 s-a hotărît să se adopte următoarea definiție pentru secundă:

Secunda este durata a 9 192 631 770 perioade ale radiației care corespunde tranziției între cele două nivele de energie hiperfine ale stării fundamentale a atomului de cesiu — 133.

Prin realizarea ceasului atomic cu cesiu (fig. 1.12) se măsoară frecvența radiației emise la tranziția de mai sus, cu o precizie care corespunde unei abateri de mai puțin de 1 s în 3 000 ani.

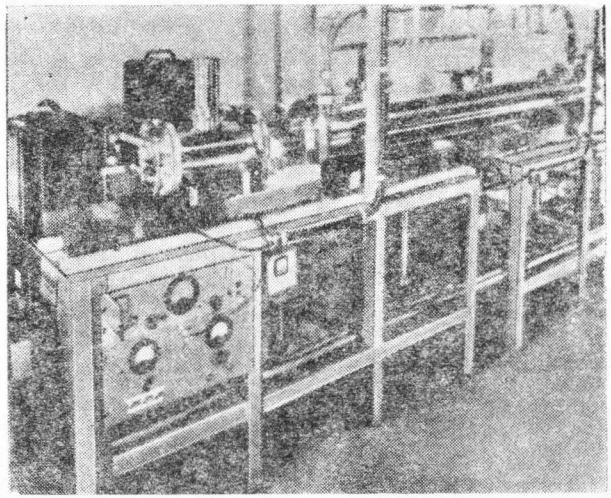


Fig. 1.12. Una din instalațiile care constituie un ceas cu cesiu.

Măsurarea timpului se face, în principiu, folosindu-se diferite procese periodice. În cele ce urmează se exemplifică ideea reglării mersului unui mecanism cu ajutorul unui oscilator la un orologiu cu balansier pendular (pendula).

Mersul pendulei este reglat de un pendul care execută oscilații cu o perioadă de două secunde. Este necesar însă ca oscilațiile acestui pendul să fie întreținute. Operația se face prin excitarea periodică a pendulului cu un surplus de energie, suficient pentru a acoperi energia disipată în decursul unei semioscilații. Aparatul din figura 1.13 reproduce acest proces.

Arborele *1*, solidar legat de discul dințat, este antrenat în mișcare de rotație de corpul *2* suspendat printr-un fir înfășurat pe arbore. În mișcare liberă, *2* ar imprima arborelui o mișcare de rotație accele-

rată, dar dinții D_1 și D_2 ai ancorei *3* opresc această mișcare permițînd discului doar o mișcare sacadată. Să presupunem că D_2 se ridică odată cu mișcarea pendulului către dreapta. Datorită pierderilor de energie din această semioscilație ($A_1 \rightarrow A_2$) pendulul n-ar mai atinge amplitudinea pe care a avut-o, în aceeași poziție, cu o oscilație înainte.

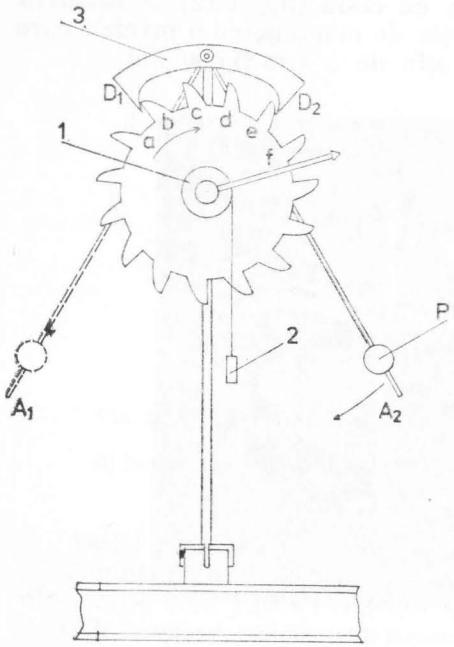


Fig. 1.13. Un model al pendulei. Pendulu comandă întreținerea propriilor oscilații.

Dar roata dințată dă un impuls ancorei, deci și pendulului prin intermediul dintelui *e* care împinge dintele D_2. Apoi *e* trece mai departe, mișcarea roții fiind blocată de dintele *a* care acum îl împinge pe D_1, în timp ce pendulul vine din A_2 în A_1 și primește astfel o energie suplimentară, egală cu aceea disipată în această semioscilație ($A_2 \rightarrow A_1$). La fel se petrec lucrurile și la semioscilația următoare, spre dreapta, unde la sfîrșitul intervalului, D_2 antrenat de mișcarea dintelui *d* primește un nou impuls.

Este de observat modul automat de comandă a procesului de excitare la sfîrșitul fiecărei semioscilații a pendulului, acest proces fiind dictat chiar de oscilator. Astfel, perioada procesului de transfer fiind reglată, transferul energetic este optim adică se face la momentul potrivit, pentru compensarea pierderilor. Este un fenomen de rezonanță. Un astfel de dispozitiv este montat la un ceas pendulă pentru a asigura mersul îndelungat. Periodicitatea proceselor este folosită deseori pentru construirea aparatelor de înregistrare a timpului, de la cele mai simple la cele mai complicate.

Mijloacele și metodele de măsurare și aprecierea timpului sînt extrem de variate. Se pot înregistra atît intervale scurte ordinul 10^{-16} s, cît și intervale de miliarde de ani. În tabelul următor se dau cîteva ordine de mărime măsurate pentru cîteva intervale de timp în care se desfășoară anumite procese.

Procesul	Intervalul de timp [s]	Metode de măsurare
Apariția Soarelui	10^{18}	Metode atomice și nucleare
Apariția omului	10^{13}	
Viața unui om	10^{9}	
Drumul unei raze de lumină între Soare și Pămînt	10^{3}	Cronometre
Succesiunea a două bătăi ale inimii	1	
O rotație a unei palete de ventilator	10^{-2}	Ceasuri atomice și moleculare
Durata unei explozii	10^{-5}	
Perioada de oscilație a microundelor de 3 cm	10^{-10}	Metoda traiectoriilor în emulsii nucleare
Timpul de înjumătățire a pionilor neutri	10^{-16}	
Limita mijloacelor tehnice actuale de măsurare		

1.7.3. Măsurarea masei

Etalonul de masă este definit prin masa prototipului internațional al kilogramului (fig. 1.14)*.

Mijloacele de măsurare a masei sînt alese în funcție de ordinul de mărime al maselor măsurate. Unul dintre cele mai cunoscute mijloace de măsurare a masei este măsurarea statică numită *cîntărire*. Cîntărirea se face cu ajutorul balanței. În tabelul următor sînt date masele cîtorva corpuri, dintre acestea numai cele din grupa de mijloc sînt măsurate, celelalte fiind determinate teoretic.

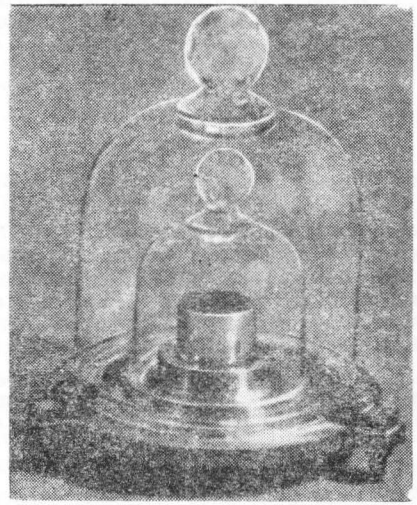


Fig. 1.14. Kilogramul etalon

* Țara noastră are o copie (nr. 2), din 1889.

Corpul	Masa [kg]	Mijloace
Soarele	10^{30}	Teoretice
Pămîntul	10^{25}	
Luna	10^{23}	
Locomotivă	10^{5}	Măsurare
Autoturism mediu	10^{3}	
1 dm^3 apă distilată la 4°C	1	
1 l de aer în condiții normale	10^{-3}	
Marcă poștală	10^{-5}	
Bacterie	10^{-11}	Teoretice
Moleculă de proteină	10^{-22}	
Moleculă de oxigen	10^{-25}	
Electron	10^{-30}	

1.8. Scalari și vectori

O mărime fizică ce intervine într-un fenomen sau într-un proces trebuie caracterizată printr-un număr de elemente astfel încît ea să fie perfect determinată.

Exemple 1. Să presupunem că vrem să calculăm densitatea unui corp omogen cunoscînd masa și volumul. Este suficient să se cunoască valorile măsurate ale masei și volumului și să se aplice relația

$$\rho = \frac{m}{V},$$

densitatea fiind astfel perfect determinată.

2. Cunoscînd masa m a unui punct material și valoarea măsurată a forței care acționează nu se poate descrie complet efectul forței (accelerația imprimată corpului), deoarece diferite forțe de aceeași valoare măsurată pot produce accelerații pe diferite direcții (fig. 1.15, a), iar pe aceeași direcție o forță poate accelera sau frîna corpul în funcție de sensul ei (fig. 1.15, b). Este necesar ca în cazul unei mărimi cum este forța, la valoarea măsurată a mărimii să se mai adauge elemente suplimentare : suportul și sensul acțiunii forței, adică să se indice și orientarea mărimii.

3. Arătînd că printr-o intersecție (fig. 1.16) viteza unui automobil este de 30 km/h această mărime nu este determinată complet deoarece nu se cunoaște direcția după care se deplasează automobilul și nici sensul deplasării pe această direcție.

Mărimile fizice care pot fi caracterizate complet, indicînd numai valoarea măsurată, se numesc *mărimi scalare* sau *scalari* (masa, densitatea, volumul). Mărimile fizice pentru a căror determinare completă este necesară în afara valorii măsurate și *orientarea* (*direcția, sensul*), se numesc *mărimi vectoriale* sau *vectori* (viteza, forța, accelerația).

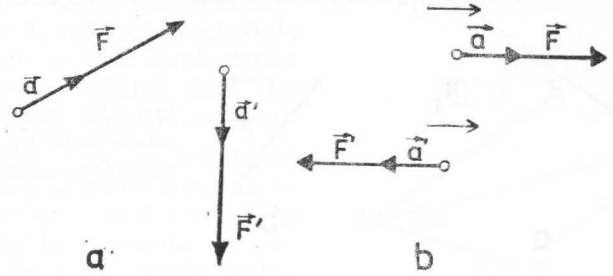


Fig. 1.15. Forțele $\vec{F}$ și $\vec{F}'$ au aceeași valoare măsurată, dar au efecte diferite.

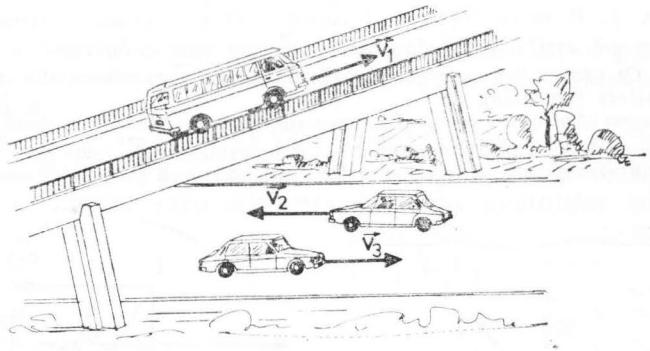


Fig. 1.16. Vitezele celor trei automobile au în intersecție viteze de aceeași valoare măsurată, dar de orientări diferite.

1.9. Reprezentarea elementelor unui vector

Caracteristicile unei mărimi vectoriale sînt *valoarea măsurată* și *orientarea*. Prin orientare se înțelege *direcția* și *sensul mărimii*. Aceste elemente pot fi figurate simbolic printr-o săgeată a cărei lungime reprezintă la scară valoarea măsurată a mărimii. În figura 1.17, b forța $\vec{F}$ are valoarea $|\vec{F}| = F = 4{,}5$ N. Dreapta pe care este desenat vectorul reprezintă *suportul vectorului*. Orice dreaptă paralelă cu suportul

vectorului are aceeași direcție. Săgeata indică *sensul vectorului* forță care are ca origine punctul O*, iar ca extremitate punctul A.

În figura 1.17, b este reprezentată o viteză de 5 m/s, originea vectorului arătînd poziția punctului material care are această viteză.

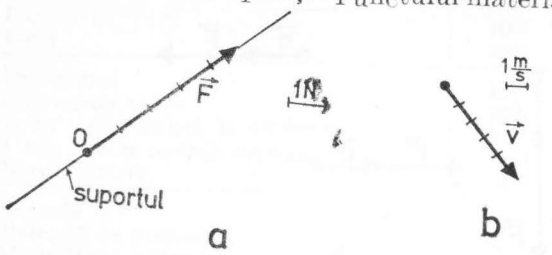


Fig. 1.17. Reprezentarea vectorului forță $|\vec{F}|=4{,}5$N (a) și a vectorului viteză $|\vec{v}|=5$ m/s (b).

1.10. Compunerea (însumarea) mărimilor vectoriale

Foarte multe situații conduc la compunerea unor mărimi vectoriale de același fel :

Exemple. 1. O barcă traversează cursul unui rîu. Vîslașul antrenează barca perpendicular pe mal imprimîndu-i viteza $\vec{v}_1$, iar apa curgătoare o antrenează cu viteza $\vec{v}_2$. Ca urmare barca se deplasează cu viteza $\vec{v}$ rezultată din compunerea celor două viteze (fig. 1.18).

2. Un vagon aflat într-o curbă este supus simultan unui sistem de două forțe, greutatea și forța centrifugă care compunîndu-se dau rezultanta $\vec{R}$ forță care pentru a se asigura stabilitatea în curbă trebuie să fie perpendiculară pe planul terasamentului (fig. 1.19).

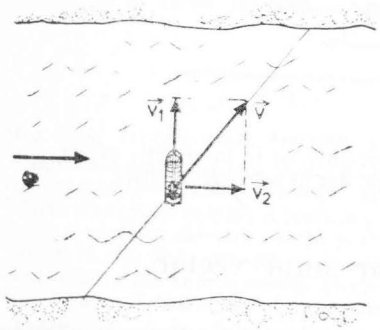


Fig. 1.18. Viteza $\vec{v}$ a bărcii este o viteză rezultată din compunerea vitezelor $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$.

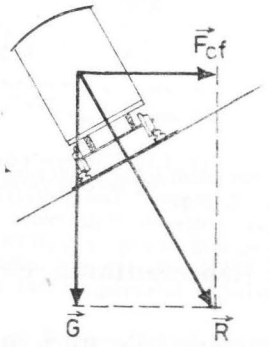


Fig. 1.19. Rezultanta $\vec{R}$ dintre forța centrifugă și greutatea $\vec{G}$ în cazul unui vagon aflat în mișcare pe o curbă.

* În cazul forței originea O se mai numește și punct de aplicație.

Regula de compunere a vectorilor este dată de experiență. Verificarea experimentală este singurul criteriu care poate justifica efectuarea unei operații de compunere. Fără această justificare nu putem fi siguri dacă operația are sens. Experiența arată că compunerea a două mărimi vectoriale de același fel, se face după *regula paralelogramului*. Fiind dați doi vectori $\vec{V}_1$ și $\vec{V}_2$ concurenți în O, vectorul sumă $\vec{V}$ este vectorul care are ca origine, originea comună O' și ca extremitate vîrful opus C al paralelogramului construit cu vectorii dați (fig. 1.20). Mărimea diagonalei, deci modulul vectorului rezultant, este dată de relația

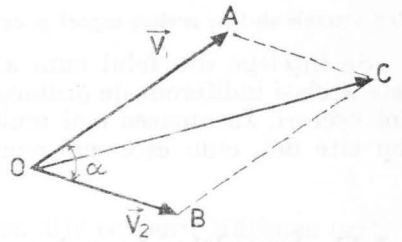


Fig. 1.20. Compunerea a doi vectori concurenți (regula paralelogramului).

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\alpha} \qquad (1.2)$$

unde α este unghiul dintre cei doi vectori. Observăm că pentru aceleași module ale componentelor modulul rezultantei variază în funcție de unghiul α.

Deoarece pentru $\alpha=0$, $V=\sqrt{V_1^2+V_2^2+2V_1V_2}=V_1+V_2$, iar pentru $\alpha=\pi$, $V=\sqrt{V_1^2+V_2^2-2V_1V_2}=V_1-V_2$, modulul vectorului rezultant este cuprins între diferența și suma modulelor componentelor (fig. 1.21)

$$V_1 - V_2 < V < V_1 + V_2$$

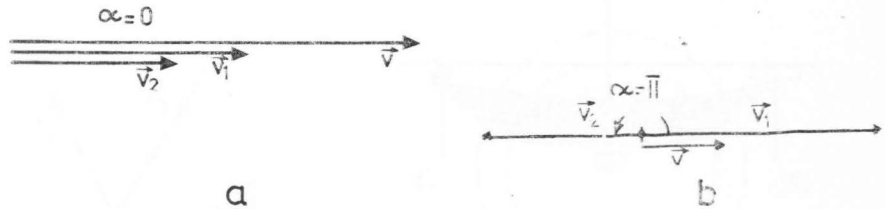


Fig. 1.21. Două cazuri particulare de compunere a doi vectori : a) $\alpha=0$ și b) $\alpha=\pi$.

Exemplu. Doi vectori, vitezele $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$, concurente, fac între ei un unghi de 60° și au modulele de 4 m/s și respectiv de 2 m/s. Să se calculeze viteza rezultantă. Modulul v este, aplicînd relația (1.2),

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\alpha} = \sqrt{16 + 4 + 16\cos 60^\circ} = 2\sqrt{7}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

În funcție de unghiul $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, compunînd cele două viteze se poate obține o viteză rezultantă v

$$v_1 - v_2 \leqslant v \leqslant v_1 + v_2$$

adică

$$2 \text{ m/s} < v < 6 \text{ m/s}$$

cînd vitezele sînt pe același suport și au sens contrar sau, respectiv, același sens.

Se înțelege din felul cum a fost definită operația că rezultatul este același indiferent de ordinea în care se efectuează adunarea celor doi vectori. Însumarea mai multor vectori se face însumînd vectorii doi cîte doi, cum este mai convenabil.

1.11. Înmulțirea unui vector cu un scalar

Dacă, de exemplu, se efectuează operația

$$\underbrace{\vec{V} + \vec{V} + \ldots + \vec{V}}_{\text{de } n \text{ ori}} = n\vec{V}$$

se ajunge la înmulțirea scalarului n cu vectorul $\vec{V}$. Rezultatul este evident un vector (conform regulei de compunere) coliniar cu $\vec{V}$, de modul de n ori mai mare. Aici n este un întreg, dar, în general, poate fi un număr real.

2

STATICA

Orice corp interacționează mecanic cu alte corpuri. Mărimea care descrie interacțiunea mecanică este *forța*. Orice corp se află deci sub acțiunea uneia sau a mai multor forțe. Totalitatea forțelor care acționează simultan asupra unui corp constituie *un sistem de forțe.*

Un sistem de forțe care, aplicat unui corp aflat în repaus sau în mișcare rectilinie și uniformă, lasă corpul în aceeași stare se numește *sistem de forțe în echilibru.*

Exemple 1. Lampa din figura 2.1 este supusă unui sistem de trei forțe concurente sub acțiunea cărora stă suspendată.

2. Arcul cu foi din figura 2.2 este acționat de un sistem de trei forțe neoncurente care îl lasă în repaus.

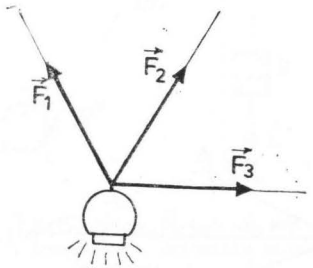


Fig. 2.1. Un sistem de trei forțe concurente.

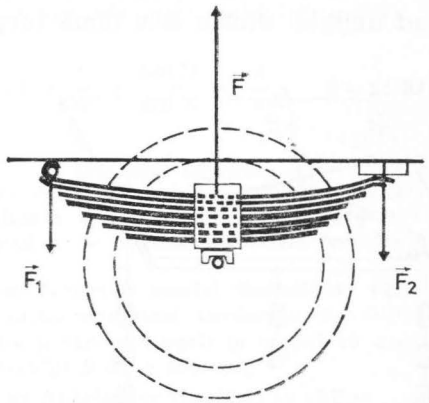


Fig. 2.2. Un sistem de trei forțe neconcurente.

În capitolul de statică ne limităm strict la echilibrul forțelor care lasă corpul în stare de repaus.

2.1. Compunerea forțelor concurente

Aranjamentul experimental arătat în figura 2.3 arată trei forțe concurente în punctul O aflat în repaus $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$. Se verifică experimental desenînd vectorii la scară, că oricare din forțe este opusă diagonalei paralelogramului care are ca laturi celelalte două forțe. Astfel, în cazul figurat se poate scrie

$$\vec{R}_{12} + \vec{F}_3 = 0$$

Deci sistemul format din forțele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ poate fi înlocuit prin forța $\vec{R}_{12}$, denumită pentru acest motiv *rezultanta* celor două forțe.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}_{12} \qquad (2.1)$$

Rezultanta a două forțe concurente este deci o forță care se găsește cu regula paralelogramului (v§1.10).

Modul de construcție grafică se observă pe figura 2.4. Lungimea R a diagonalei este dată de relația (1.2) aplicată în acest caz

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha} \qquad (2.2)$$

α fiind unghiul dintre cele două forțe.

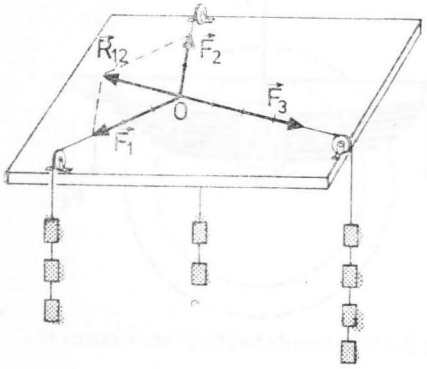


Fig. 2.3. Oricare din forțe este egală și de semn contrar cu rezultanta celorlalte două.

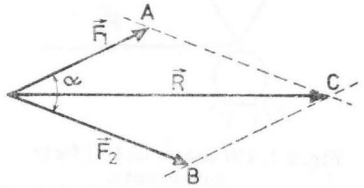


Fig. 2.4. Construcția grafică a rezultantei a două forțe concurente.

Exemple. 1. În figura 2.5 este ilustrată acțiunea simultană a două forțe : greutatea $\vec{G}$ a persoanei din scaun și forța centrifugă $\vec{F}$ care rezultă din rotația caruselului. Conform regulei paralelogramului de compunere a vectorilor, cablurile care susțin scaunul se înclină după direcția rezultantei $\vec{R}$. Cunoscînd componentele $G = 800$ N, $F = 600$ N și

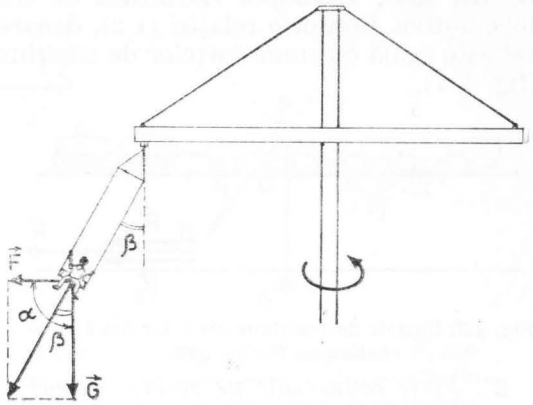


Fig 2.5. Cablurile se orientează după direcția rezultantei.

unghiul dintre ele $\alpha = \pi/2$ se poate determina rezultanta pe două căi — analitic (a) și grafic (b) :

a) se aplică relația (1.2)

$$R = \sqrt{G^2 + F^2} = \sqrt{64 + 36} \cdot 100 \text{ N} = 1\,000 \text{ N}$$

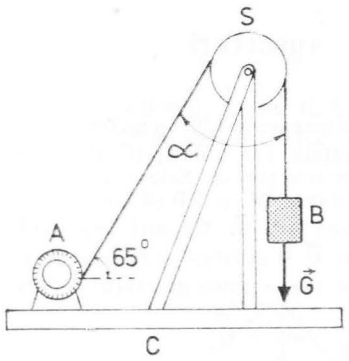


Fig. 2.6. Rezultanta tensiunilor din firele sonetei este orientată după sprijinul SC.

unghiul dintre lanțul pe care-l face lanțul de susținere cu verticala fiind calculabil din relația.

$$\text{tg}\beta = \frac{F}{G} = \frac{600 \text{ N}}{800 \text{ N}} = \frac{3}{4}\,; \qquad \beta = 36°52'$$

b) Se desenează la scară vectorii $\vec{G}$ și $\vec{F}$. Se ia de exemplu, 1 cm = 200N, se construiește rezultanta și se măsoară atît diagonala cît și unghiul β. Se regăsesc rezultatele precedente.

2. Scripetele sonetei desenate în figura 2.6 este supus rezultantei tensiunilor care acționează în fire și care sînt egale în modul cu greutatea berbecului B ($G = 5000$ N).

a) Aplicînd relația (1.2) se obține

$$R = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2\cos\alpha} = \sqrt{2(1 + \cos\alpha)}\, G =$$

$$= 5000 \text{ N} \sqrt{2(1 + 0{,}906)} \approx 5000 \text{ N} \cdot 1{,}95 = 9762 \text{ N}.$$

b) Grafic, se alege un segment de 1000 N = 1 cm și se construiesc într-un punct vectorii $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ pe direcțiile SA și SB. Se măsoară rezultanta și se verifică rezultatul precedent. Direcția rezultantei este direcția sprijinului SC montat pentru a întări soneta.

Cazuri particulare. 1°. *Forțe concurente pe același suport și având același sens.* **Exemplu.** Garnitura de tren este remorcată de două locomotive. Conform relației (1.2), deoarece $\alpha = 0$ modulul rezultantei este egală cu suma forțelor de tracțiune ale celor două locomotive (fig. 2.7).

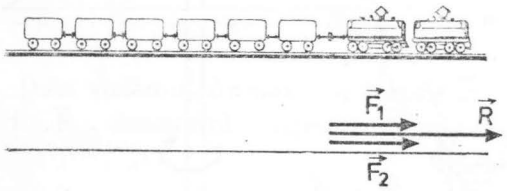


Fig. 2.7. Forțele de tracțiune ale celor două locomotive se însumează.

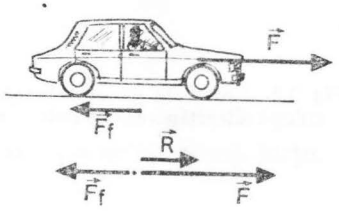


Fig. 2.8. Forța de tracțiune și cea de frecare sînt de sens contrar.

2°. *Forțe concurente pe același suport și în sens contrar.* Forța de frecare $\vec{F}_f$ se opune forței de tracțiune $\vec{F}$ a motorului. Modulul rezultantei (relația (1.2)) este diferența modulelor forțelor, rezultanta avînd sensul celei mai mari. Astfel, autoturismul se poate deplasa accelerat ($F > F_f$), uniform ($F = F_f$) sau poate fi frînat ($F < F_f$) (fig.2.8).

2.2. Descompunerea forțelor după suporturi concurente

Exemple. 1. În figura 2.9, a este desenată o consolă pe care se află un motor. Greutatea $\vec{G}$ a motorului trebuie susținută de grinda orizontală AM și de sprijinul MB. În acest caz o forță nu poate acționa decît de-a lungul acestor suporturi. Este firesc să ne punem problema care sînt aceste forțe care acționînd după AM și MB să aibă același efect ca și $\vec{G}$. Înseamnă că aceste forțe dau prin însumare forța $\vec{G}$. De aici, procedeul: se construiește un paralelogram care are ca diagonală pe $\vec{G}$ și ca laturi segmente de pe suporturile alese (fig. 2.9, b). Forțele $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ se numesc *componentele* greutății $\vec{G}$ după suporturile MA și MB.

$$\vec{G} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Efectele componente lor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ sînt de comprimare a proptelei și, respectiv, de scoatere a grinzii din perete.

2. Mișcarea pendulului gravitațional P se face sub acțiunea greutății $\vec{G}$ (fig. 2.10) Ținînd seamă de posibilitățile de mișcare este firesc cu greutatea $\vec{G}$ să fie descompusă după direcția firului, care poate prelua o tensiune, și după tangenta la arcul de cerc (C) pe care îl poate descrie punctul P. Componenta $\vec{F}_1$, întinde firul care este nedeformabil.

iar $\vec{F}_2$ readuce pendulul în poziția de echilibru. Direcția și modulul componentelor se modifică odată cu schimbarea poziției pendulului, după cum se poate observa din relațiile $F_1 = G \cos \alpha$ și $F_2 = G \sin \alpha$ care se obțin rezolvînd triunghiul $P\,A\,B$.

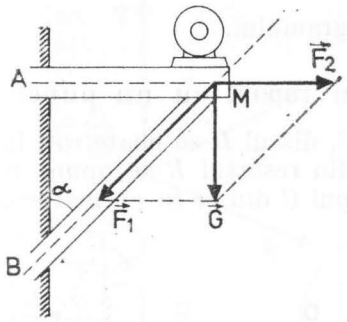


Fig. 2.9. Componenta $\vec{F}_2$ are tendința de a scoate grinda din încastrare, iar $\vec{F}_1$ comprimă suportul consolei.

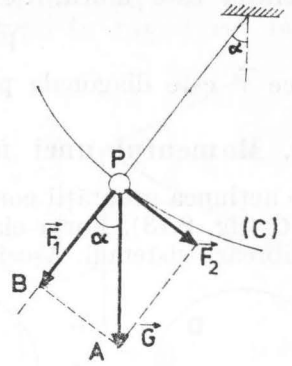


Fig. 2.10. Componenta $\vec{F}_2$ readuce pendulul în poziția de echilibru, iar $\vec{F}_1$ întinde firul.

3. Greutatea $\vec{G}$ a corpului C aflat pe planul înclinat se poate descompune în două componente: $\vec{G}_1$ în lungul planului și $\vec{G}_2$ perpendiculară pe plan (fig. 2.11). $\vec{G}_1$ determină alunecarea corpului pe plan, iar $\vec{G}_2$ determină apăsarea pe planul înclinat, pe care îl considerăm nedeformabil. Componentele sînt (fig. 2.11).

$$G_1 = G \sin \alpha \text{ și } G_2 = G \cos \alpha$$

care depind deci de unghiul α de înclinare al planului înclinat.

În general, fiind dat un vector $\vec{V}$ (fig. 2.12) și două suporturi făcînd între ele un unghi α operația de descompunere constă în *a*

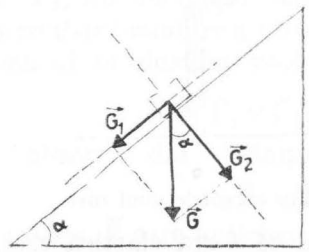


Fig. 2.11. Componenta $\vec{G}_1$ determină alunecarea corpului pe plan.

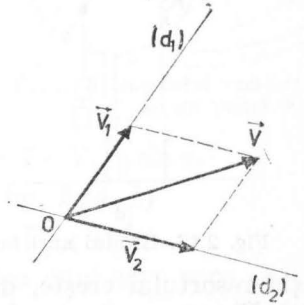


Fig. 2.12. Metoda grafică de descompunere a unui vector după două direcții concurente.

construi pe cele două drepte suport doi vectori $\vec{V}_1$ *și* $\vec{V}_2$ *din care prin însumare să rezulte vectorul* $\vec{V}$.

Operația este unică. Se obțin vectorii $\vec{V}_1$ și $\vec{V}_2$ astfel că:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}$$

deoarece $\vec{V}$ este diagonala paralelogramului.

2.3. Momentul unei forțe în raport cu un punct

Sub acțiunea greutății corpului C, discul D se poate roti în jurul axului O (fig. 2.13). Forța elastică din resortul R se opune rotației și echilibrează sistemul. Așezînd corpul C din ce în ce mai excentric

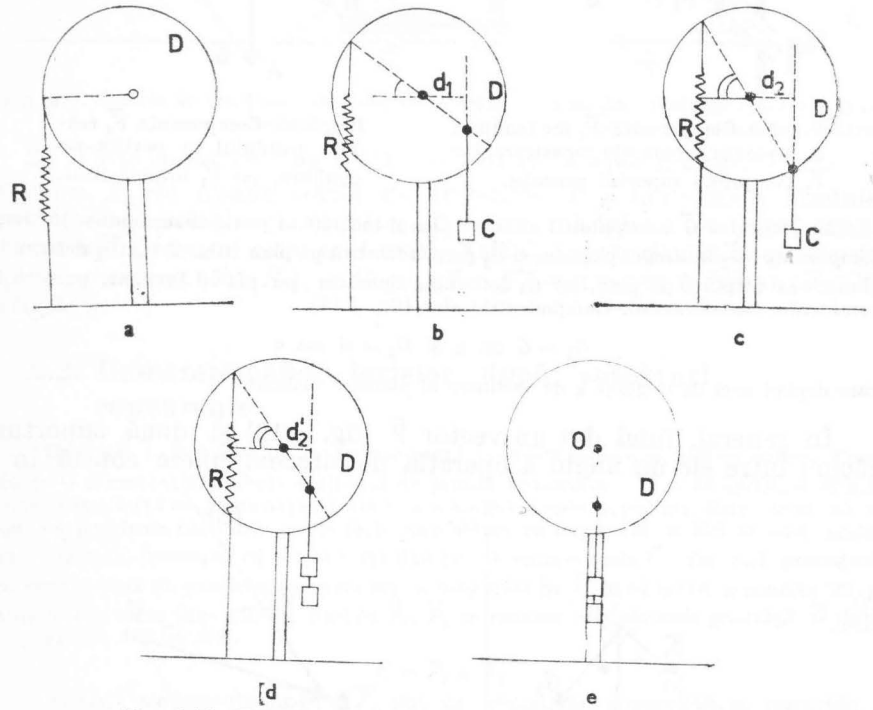


Fig. 2.13. Efectul unei forțe aplicate excentric unui disc.

deformația resortului crește, dovedind că forța elastică crește (fig. 2.13, *b*, *c*). Pentru a măsura efectul de rotație al unei forțe este deci necesar să se ia în considerare și distanța suportului forței față de centrul de rotație. Același efect de rotație ca în figura 2.13, *c* se

poate obține acționînd cu o forță de două ori mai mare pe un suport aflat față de O la o distanță de două ori mai mică.

Pentru a descrie și măsura, efectul de rotație al unei forțe se introduce mărimea fizică, *momentul forței în raport cu un punct.*

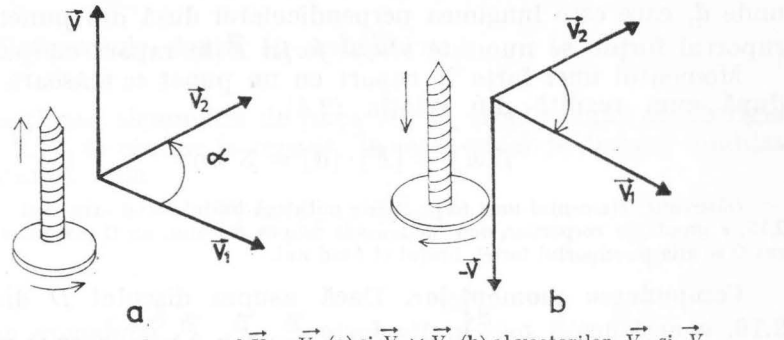


Fig. 2.14. Produsul vectorial $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ (a) și $\vec{V}_2 \times \vec{V}_1$ (b) al vectorilor $\vec{V}_1$ și $\vec{V}_2$.

Această noțiune introduce o nouă operație cu vectori, produsul vectorial. Prin definiție (fig. 2.14), se numește produs vectorial a doi vectori $\vec{V}_1$ și $\vec{V}_2$, un vector $\vec{V}$ perpendicular pe planul determinat de cei doi vectori, avînd modulul egal cu $V_1 V_2 \sin \alpha$ și sensul dat de regula șurubului drept (fig. 2.14, *a*).

Aceasta înseamnă că se așază șurubul perpendicular pe planul vectorilor $\vec{V}_1$ și $\vec{V}_2$. Rotind șurubul în sensul suprapunerii primului vector ($\vec{V}_1$) peste cel de-al doilea ($\vec{V}_2$) cu un unghi mai mic de π, sensul de înaintare a șurubului este sensul produsului vectorial.

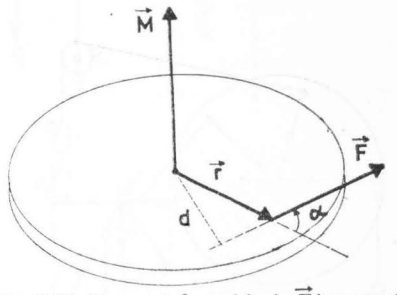


Fig. 2 15. Momentul unei forțe $\vec{F}$ în raport cu un punct 0.

$$\vec{V} = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2; \quad |\vec{V}| = V = V_1 V_2 \sin \alpha. \tag{2.3}$$

Se observă din definiție că (fig. 2.14, *b*)

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \times \vec{V}_1.$$

Fie forța $\vec{F}$ care acționează asupra unui corp care se poate roti în jurul unui punct O (fig. 2.15). Se numește momentul forței $\vec{F}$ în raport cu O, vectorul $\vec{M}$ dat de relația

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{2.4}$$

Din relaţia (2.3) se observă că modulul momentului $\vec{M}$ este

$$M = rF \sin \alpha = Fd \qquad (2.4')$$

unde d, care este lungimea perpendicularei dusă din punctul O pe suportul forţei, se numeşte *braţul forţei* $\vec{F}$ în raport cu punctul O.

Momentul unei forţe în raport cu un punct se măsoară în N·m, după cum rezultă din relaţia (2.4).

$$[M] = [F] \cdot [d] = \text{N} \cdot \text{m}$$

Observaţie. Momentul unei forţe $\vec{F}$ este nul dacă braţul forţei este nul. În figura 2.13, *e* greutăţile corpurilor, deşi acţionează asupra discului, nu îl mai rotesc. În acest caz O se află pe suportul forţei, braţul ei fiind nul.

Compunerea momentelor. Dacă asupra discului D din figura 2.16, *a* acţionează mai multe forţe $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ coplanare cu discul fiecare determină cîte un moment respectiv $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$ şi $\vec{M}_3$ de aceeaşi direcţie şi sensul arătat. Însumînd aceste momente obţinem momentul rezultant $\vec{M}$ (fig. 2.16, *b*).

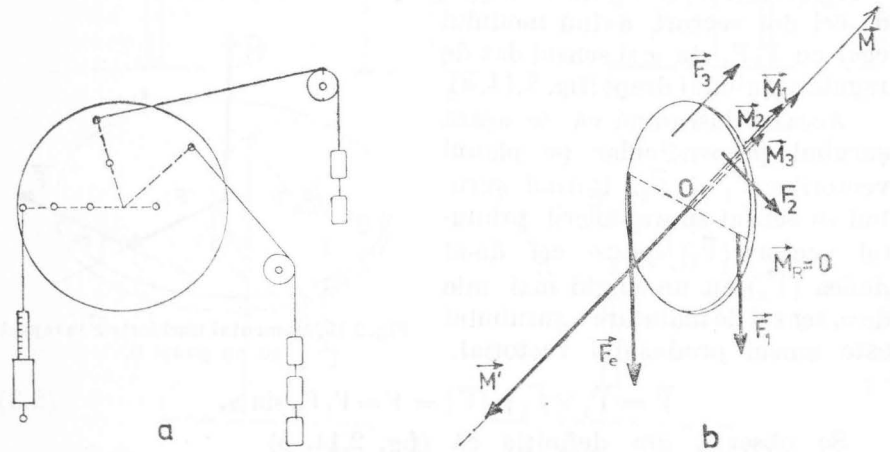


Fig. 2.16. Compunerea momentelor.

Acţiunii de rotire spre dreapta i se opune forţa elastică $\vec{F}_e$ a resortului dinamometrului, care la echilibru dă un moment $\vec{M}'$ egal şi de semn contrar cu momentul $\vec{M}$. Discul este în repaus. Momentul rezultant este zero.

Condiţia ca un corp în repaus să nu se rotească în jurul unui punct este ca momentul rezultant în raport cu acest punct al forţelor care acţionează asupra corpului să fie zero.

2.4. Sisteme de forţe în echilibru

Sub acţiunea sistemului de forţe $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ şi *a* tensiunii din fir rigla AB (fig. 2.17, a) rămîne în repaus. În acest caz se realizează condiţia de rezultantă nulă

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{T} = 0$$

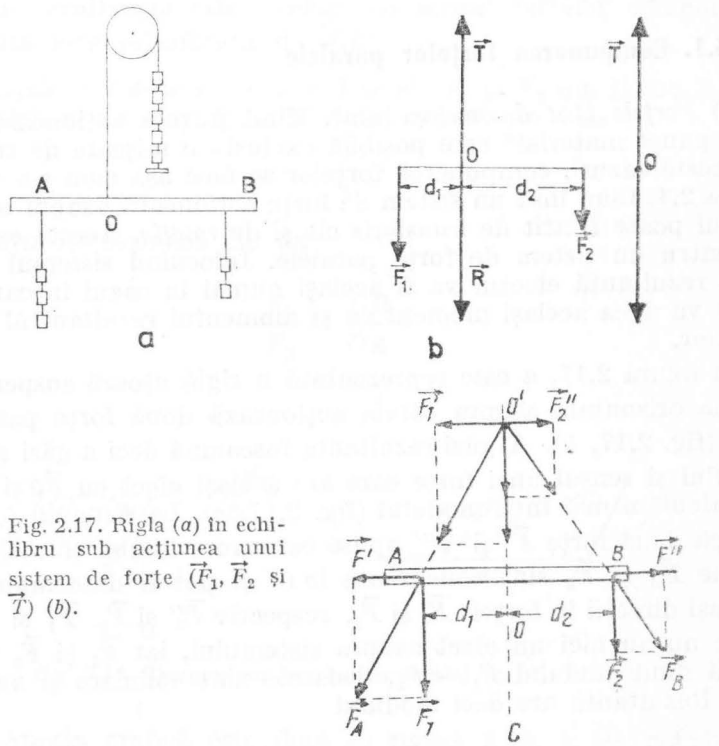


Fig. 2.17. Rigla (*a*) în echilibru sub acţiunea unui sistem de forţe ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ şi $\vec{T}$) (*b*).

şi de moment rezultant nul (fig. 2.17, *b*).

$$F_1 d_1 - F_2 d_2 = 0.$$

Rigla aflată în repaus rămîne mai departe în această stare. Sistemele de forţe pentru care se realizează condiţiile

$$\vec{R} = 0 \text{ şi } \vec{M} = 0 \qquad (2.5)$$

se numesc *sisteme de forţe în echilibru*. Despre corpurile care se află sub acţiunea unui sistem de forţe în echilibru se spune că *sînt în echilibru*.

Relaţiile (2.5), îndeplinite simultan, constituie condiţia ca un corp aflat în repaus să rămînă în continuare în repaus.

2.5. Aplicaţii

2.5.1. Compunerea forţelor paralele

a) *Forţele sînt de acelaşi sens*. Cînd forţele acţionează asupra unui punct material* este posibilă exclusiv o mişcare de translaţie. În aceste cazuri, compunerea forţelor se face aşa cum s-a arătat în figura 2.4. Cînd însă un sistem de forţe acţionează asupra unui corp efectul poate fi atît de *translaţie* cît şi de *rotaţie*. Acesta este cazul şi pentru un sistem de forţe paralele. Înlocuind sistemul printr-o forţă rezultantă efectul va fi acelaşi numai în cazul în care rezultanta va avea acelaşi moment ca şi momentul rezultant al componentelor.

În figura 2.17, *a* este reprezentată o riglă uşoară suspendată în poziţie orizontală asupra căreia acţionează două forţe paralele $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ (fig. 2.17, *b*). A găsi rezultanta înseamnă deci a găsi suportul, modulul şi sensul unei forţe care are acelaşi efect cu $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$.

Calculăm mai întîi modulul (fig. 2.17, *c*). La sistemul format se adaugă două forţe $\vec{F}'$ şi $\vec{F}''$ opuse care nu schimbă efectul. Rezultantele $\vec{F}_A$ şi $\vec{F}_B$ sînt concurente în O' şi pot fi descompuse după aceleaşi direcţii în forţele $\vec{F}_1'$ şi $\vec{F}_1$, respectiv $\vec{F}_2''$ şi $\vec{F}_2$. $\vec{F}_1'$ şi $\vec{F}_2''$ fiind opuse nu au nici un efect asupra sistemului, iar $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ se însumează dînd modulul $F_1 + F_2$, deoarece sînt coliniare şi au acelaşi sens. Rezultanta are deci modulul

$$R = F_1 + F_2$$

* Noţiune explicată în paragraful 3.3.

cu condiţia să se aplice în punctul O astfel încît să nu rotească rigla, o confirmare a situaţiei din figura 2.17, *a*. Aceasta înseamnă că momentul rezultant al sistemului $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ este acelaşi cu momentul rezultantei $\vec{R}$ faţă de punctul O, adică zero

$$F_1 d_1 - F_2 d_2 = 0$$

Cu alte cuvinte punctul de aplicaţie este astfel plasat încît

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}.$$

Sensul rezultantei este acelaşi cu sensul forţelor componente. Rezultanta este echilibrată de $\vec{T}(b)$

b) *Forţele sînt de sens contrar*. Forţele F_1 şi F_2 din figura 2.18, *a* sînt paralele şi de sens opus. Modulul rezultantei este

$$R = F_1 - F_2$$

iar condiţia de moment nul dă

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{OB}{OA}.$$

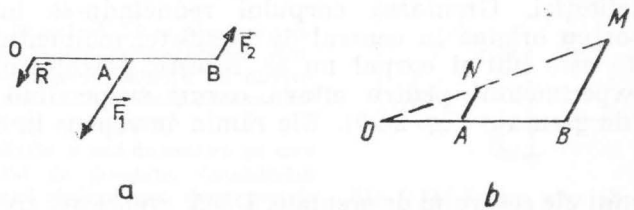


Fig. 2.18. Compunerea forţelor paralele şi de sens contrar.

Construcţia grafică este dată în figura 2.18, *b*. Se construiesc în B un segment $BM = F_1$ şi în A un segment $AN = F_2$, în acelaşi sens. Dreapta MN intersectează AB în O, punctul de aplicaţie al rezultantei. În adevăr, punctul O verifică relaţia precedentă.

2.5.2. Centrul de greutate

Orice corp poate fi privit ca fiind alcătuit dintr-un mare număr de puncte materiale, fiecare avînd o greutate (fig. 2.19). Greutatea corpului apare astfel ca rezultanta tuturor greutăţilor punctelor

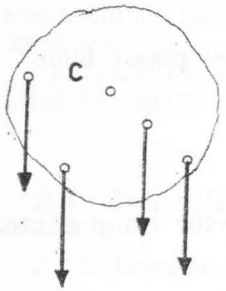


Fig. 2.19 . Greutatea unui corp este rezultanta greutăţilor punctelor materiale componente. Punctul de aplicaţie este în centrul de greutate (C).

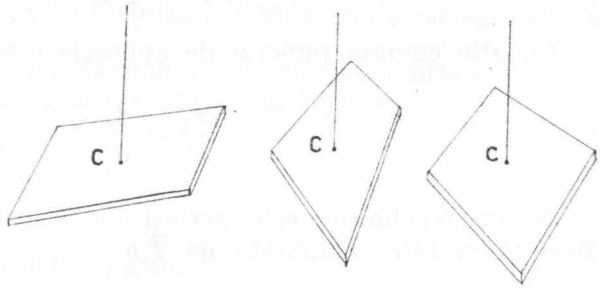


Fig. 2.20. Suspendat în centrul de greutate, corpul rămîne în echilibru indiferent.

materiale (vectori paraleli*). Punctul de aplicaţie (C) al rezultantei este *centrul de greutate al corpului*. Găsirea poziţiei punctului C prin calcul sau pe cale grafică este obiectul acestui paragraf.

Un corp suspendat în centrul de greutate rămîne în repaus în orice poziţie ar fi aşezat. Acest fapt poate fi explicat prin considerarea definiţiei. Greutatea corpului reducîndu-se întotdeauna la un vector cu origina în centrul de greutate, momentul vectorului greutate este nul şi corpul nu se roteşte. Rezultatul poate fi verificat experimental pentru cîteva cazuri suspendînd corpurile în centrul de greutate (fig. 2.20). Ele rămîn în repaus în orice poziţie.

Proprietăţi ale centrului de greutate. Dacă greutatea specifică sau greutatea unităţii de volum este aceeaşi în tot volumul corpului, corpul este omogen. Dacă un corp omogen are o formă geometrică admiţînd un centru, o dreaptă sau un plan de simetrie, rezultă că centrul de greutate se află în acel punct, pe acea dreaptă sau în

* Cîmpul gravitaţional este considerat uniform în tot spaţiul ocupat de corp.

planul de simetrie deoarece întotdeauna există pentru un punct al corpului un punct de aceeaşi masă, simetric cu primul în raport cu punctul, dreapta sau cu planul de simetrie. În tabelul următor sînt înscrise pentru cîteva corpuri poziţiile centrului lor de greutate.

Corpul	Poziţia centrului de greutate
Placă triunghiulară	Intersecţia medianelor
Paralelogram	Intersecţia diagonalelor
Disc	Centrul discului
Coroană circulară	Centrul coroanei
Paralelipiped	Punctul de intersecţie al diagonalelor
Cilindru drept	Pe axă, la mijloc
Sferă	Centrul sferei
Con circular drept	Pe axă, la $^1/_3$ de bază

Exemplu. Fie un corp omogen de forma unui paralelipiped dreptunghic (fig. 2.21 centrul O de intersecţie a diagonalelor este un centru de simetrie. Un punct oarecare M de masă m are un simetric M' de aceeaşi masă. Greutăţile $\vec{G}_M$ şi $\vec{G}_M$ au aceleaşi momente faţă de O dar au semne contrarii. Rezultantele tuturor perechilor de forţe de acest fel au punctele de aplicaţie în O, care este astfel centrul de greutate.

În acelaşi fel se poate arăta că orice punct de aplicaţie al oricărei rezultante pentru fiecare pereche de puncte materiale simetrice se află pe o axă de simetrie sau într-un plan de simetrie.

Aceste două observaţii sînt necesare în problema determinării centrului de greutate după cum reiese din exemplul următor:

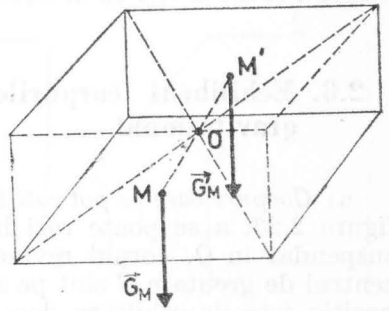


Fig. 2.21. Pentru orice punct M există unul M' simetric, astfel încît momentul rezultant faţă de O este nul.

Exemplu de calcul. Să se găsească centrul de greutate al unui arbore care este alcătuit dintr-un disc şi un cilindru cu dimensiunile din figura 2.22. Materialul din care este construit arborele este omogen.

Corpul admite o axă de simetrie pe care se află centrul de greutate. Considerăm arborele ca fiind alcătuit din două puncte materiale — (centrul de greutate al discului (C_1) şi cel al cilindrului (C_2) — plasate în centrele lor de simetrie. Punctul de aplicaţie al forţelor $\vec{G}_1$ şi $\vec{G}_2$ este centrul de greutate C şi poate fi găsit scriind că momentul rezultant faţă de el este nul

$$\frac{\rho\pi d_1^2}{4} h_1 x - \rho \frac{\pi d_2^2}{4} h_2 \left(\frac{h_1 + h_2}{2} - x \right) = 0.$$

Se simplifică relația cu $\pi\varrho/4$ și se obține

$$d_1^2 h_1 x = d_2^2 h_2 \left(\frac{h_1 + h_2}{2} - x \right).$$

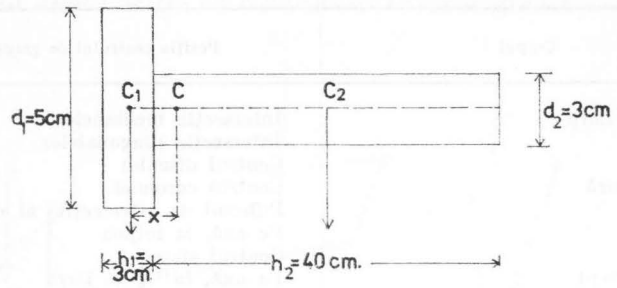


Fig. 2.22. O metodă pentru aflarea centrului de greutate.

Rezolvînd în raport cu x și înlocuind rezultă

$$x = \frac{d_2^2 h_2 \dfrac{h_1 + h_2}{2}}{d_1^2 h_1 + d_2^2 h_2} = 17{,}7 \text{ cm}.$$

Centrul C se află la 19,2 cm de capătul din stînga al arborelui.

2.6. Echilibrul corpurilor în cîmpul gravitațional

a) *Corpuri care se pot roti în jurul unei axe orizontale.* Corpul din figura 2.23, *a* se poate roti în jurul axei care trece prin O. Fiind suspendat în O, corpul revine în poziția de echilibru în care O și centrul de greutate C sînt pe aceeași verticală (fig. 2.23, *b*). Această poziție este de echilibru deoarece după cum se observă rezultanta forțelor este nulă

$$\vec{R} = \vec{G} + \vec{F} = 0,$$

iar momentul rezultant față de O este egal cu zero

$$M = G \cdot d = 0$$

Scoaterea corpului din această poziție determină un moment care îl readuce în poziția de echilibru. Corpul nu părăsește poziția de echilibru fără ca o forță exterioară să acționeze; *echilibrul este stabil.*

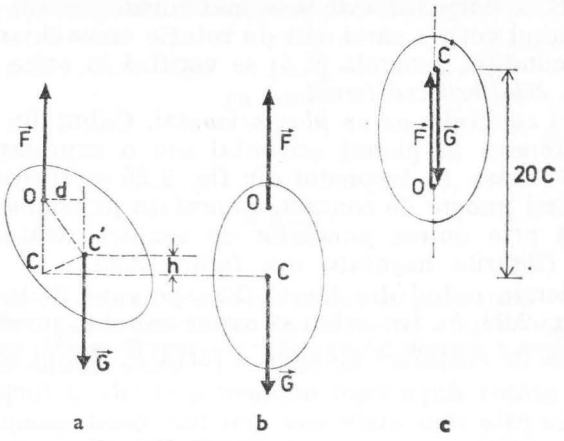


Fig. 2.23. Echilibrul corpului suspendat.

Observăm că în oricare poziție energia potențială a corpului este mai mare decît în aceea de echilibru stabil. În C', de exemplu, energia potențială este $E_p = mgh$, admițînd că în poziția de echili-

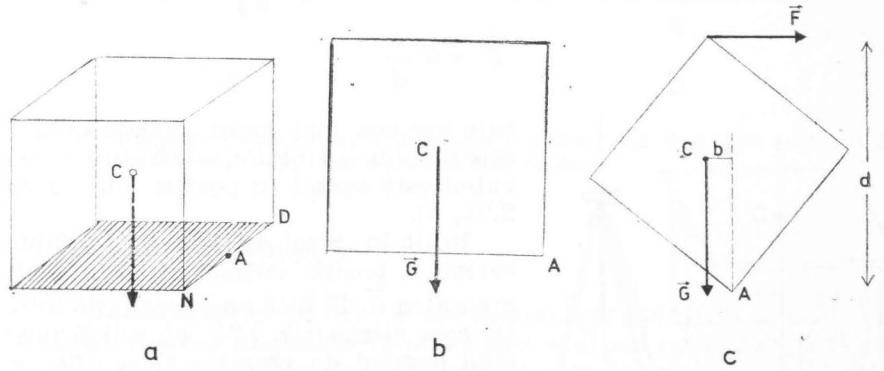


Fig. 2.24. Un cub sprijinit pe o suprafață orizontală (a, b) și supus unui moment de răsturnare în jurul unei muchii (c).

bru aceasta are valoarea zero. Axa O fiind fixă, cea mai mare energie potențială pe care o poate avea corpul este $2mg\,OC$ (fig. 2.23, c). Aceasta este o nouă poziție de echilibru deoarece $\vec{R} = 0$ și $\vec{M} = 0$.

Dar, o dată deviat, corpul nu mai revine, ci se stabilește după cîteva oscilații în poziția de echilibru stabil. Poziția C' se numește de *echilibru labil* sau *instabil*.

Așadar, poziția de echilibru stabil corespunde stării în care energia potențială a corpului este cea mai mică.

În cazul unui corp a cărei axă de rotație trece chiar prin centrul de greutate condiția generală (2.5) se verifică în orice poziție. Corpul se află în *echilibru indiferent*.

b) *Corpuri sprijinite pe un plan orizontal.* Cubul din figura 2.24, *a*, aflat în repaus în planul orizontal are o suprafață de sprijin haşurată, iar masa și trepiedul din fig. 2.25 se sprijină în patru, respectiv în trei puncte de contact. Suprafața de contact sau suprafața obținută prin unirea punctelor de contact alcătuiește o *bază de susținere* (figurile haşurate din figura 2.25).

Să considerăm cubul din figura 2.24 pe care îl desenăm văzut din lateral (fig. 2.24, *b*). Încercăm să rotim cubul în jurul unei muchii ($NĎ$) din baza de susținere aplicînd o forță $\vec{F}$. Cubul se rotește sau nu în sensul arătat după cum momentul $(F \cdot d)$ al forței $\vec{F}$ față de axa de rotație este mai mare sau mai mic decît momentul $G \cdot b$ al greutății $\vec{G}$ față de aceeași axă.

La echilibru

$$F \cdot d = G \cdot b.$$

Se observă că pentru răsturnare trebuie aplicată forța

$$F = G \frac{b}{d}$$

care are cea mai mare valoare cînd b este maxim și d minim, adică atunci cînd cubul este așezat în poziția din figura 2.24, *b*).

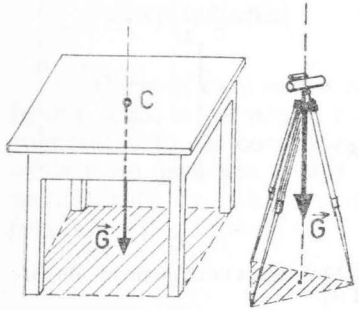


Fig. 2.25. Baze de susținere.

Rotit în jurul muchiei ND cubul revine la poziția inițială atîta timp cît greutatea $\vec{G}$ dă încă un moment de rotație spre stînga (fig. 2.24, *c*), adică pînă cînd centrul de greutate C se află pe aceeași verticală cu A sau verticala centrului de greutate se mai află încă în interiorul bazei de susținere, condiție pe care o îndeplinește orice corp sprijinit, cu bază de susținere (fig. 2.25), aflat în echilibru.

Aplicație. Forța care poate produce răsturnarea corpurilor are diferite puncte de aplicație. În cazul înscrierii unui vehicul într-o curbă fiecare punct al acestuia este supus unei forțe de natură centrifugă, iar rezultanta care se află în centrul de greutate al vehiculului (fig. 2.26, *a*), dă față de punctul O un moment de răsturnare căruia i se opune momentul $G \frac{d}{2}$ al greutății față de același punct. La echilibru,

$$Fh = G \frac{d}{2}$$

de unde

$$F = G \frac{d}{2h}.$$

Se observă că în curbă un vehicul este cu atît mai stabil (forța de răsturnare mai mare) cu cît centrul de greutate (C) este mai jos (h, mic) și cu cît ecartamentul roților (d) este mai mare. Din acest punct de vedere putem compara o mașină de curse (fig. 2.26, *b*) cu un autoturism obișnuit (fig. 2.26, *a*).

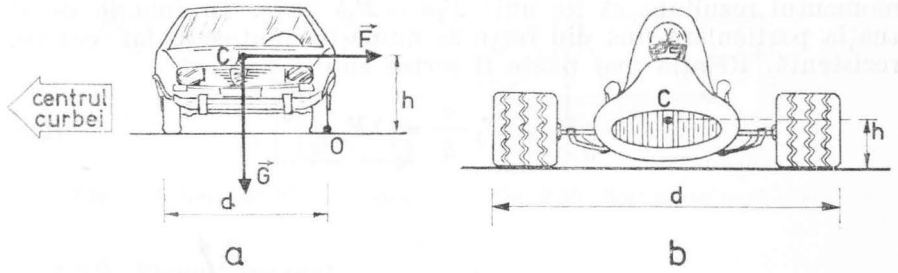


Fig. 2.26. Stabilitatea unui autovehicul depinde în primul rînd de poziția centrului de greutate și ecartamentul roților.

2.7. Mașini simple

Problemele tipice pe care le are de rezolvat industria sau tehnica implică folosirea mașinilor de mai mare sau mai mică complexitate sau utilizarea mecanismelor simple prin care folosindu-se forțe mici se realizează forțe mult mai mari. Obiectul acestui paragraf este studiul mecanismelor simple. În general, orice mașină poate fi considerată ca un ansamblu de corpuri asupra cărora aplicîndu-se o forță de intrare și efectuîndu-se un lucru mecanic se obține la ieșire o forță amplificată care efectuează un lucru mecanic. Indiferent

de felul mecanismelor care intră în componență o mașină poate fi figurată schematic ca în desenul 2.27 astfel că

$$F_{ieșire} = \lambda F_{intrare}. \qquad (2.6)$$

Fig. 2.27. Schema generală a unei mașini.

Forța de ieșire este numită și *forță rezistentă*, iar cea de intrare *forță motoare*.

O mașină simplă este alcătuită dintr-un corp rigid prin intermediul căruia o forță sau un cuplu echilibrează o altă forță sau un alt cuplu. Pîrghia, planul înclinat, pana, șurubul, scripetele sînt mașini simple.

2.7.1. Pîrghia

O bară rigidă sprijinită sau articulată într-un punct se poate roti în jurul acestui punct sub acțiunea unor forțe (fig. 2.28). Condiția de echilibrare este ca momentul rezultant să fie nul: $F_1 a = F_2 b$ (2.7). În funcție de situația particulară una din forțe se numește motoare, iar cealaltă rezistentă. Relația mai poate fi scrisă sub forma

$$F_2 = F_1 \frac{a}{b} = \lambda F_1 \qquad (2.8)$$

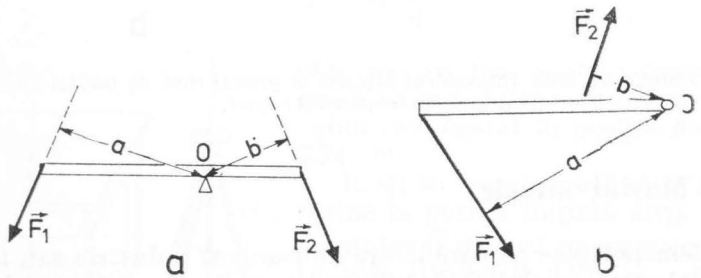


Fig. 2.28. Pîrghia : O — punct de sprijin (a) și articulație (b).

care arată că forța F_1 este multiplicată cu factorul λ. În cazul absenței frecărilor se observă că λ depinde exclusiv de raportul geometric. În general, însă, amplificarea este mult mai mică decît rezultă din raportul a/b.

Exemple. 1. *Maneta frînei de mînă* (fig. 2.29) este construită ca o pîrghie cotită articulată în O. Din aplicarea relației se observă că

$$F_2 = F_1 \frac{a}{b}$$

adică forța motoare de acțiune a mîinii este multiplicată cu factorul a/b, necesar pentru a bloca autovehiculul prin forța rezistentă F_2, raport desigur diminuat întrucîtva de frecarea din articulația O.

2. *Dispozitivul hidraulic de basculare* (fig. 2.30) cutia (bena) autocamionului se poate roti în jurul axei. În orice moment, momentul forței $\vec{F_1}$ determinată de dispozitivul hidraulic este egal cu momentul greutății $\vec{G}$ al cărei modul și braț se modifică pe măsură ce înclinarea cutiei se schimbă și sarcina este descărcată, ca, de altfel, modulul și brațul forței $\vec{F_1}$.

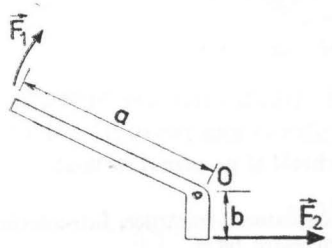


Fig. 2.29. Levierul frînei de mînă.

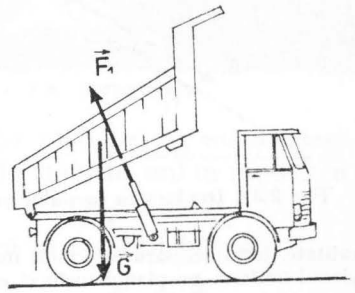


Fig. 2.30. Basculareа unei bene.

2.7.2. Planul înclinat

Pentru ridicarea unui corp pe verticală la o înălțime h este necesară o forță egală cel puțin cu greutatea $\vec{G}$ a corpului (fig. 2.31, *a*). Deplasînd corpul nu pe verticală, ci pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală, putem să-l ridicăm la aceeași înălțime dispunînd de o forță $\vec{F} = -\vec{G_1}$, de modul $G \sin \alpha$, cu atît mai mică cu cît α este mai mic.

Deci forța motoare F este multiplicată față de valoarea forței rezistente G cu factorul $\frac{1}{\sin \alpha}$ $\left(|\sin \alpha| \leqslant 1, \ \frac{1}{|\sin \alpha|} \geqslant 1\right)$

$$F \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = G. \qquad (2.9)$$

Exemplu. Pentru a trece un pian de 3600 N peste o treaptă de 0,27 m, prin tragerea lui pe un plan înclinat de 3 m lungime, este necesară în absența frecării (cazul ideal), forța F

$$F = G \sin \alpha = 3600 \text{ N} \cdot \frac{0{,}27}{3} = 3600 \text{ N } 0{,}09 = 324 \text{ N}.$$

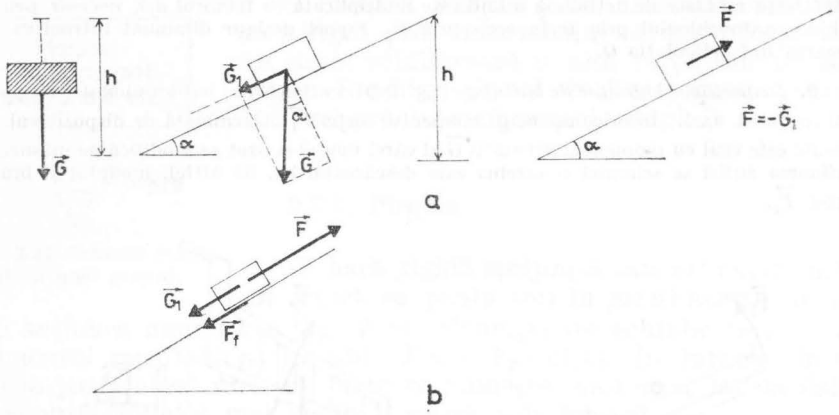


Fig. 2.31. Deplasarea corpului pe verticală și pe planul înclinat.

În realitate, forța necesară este mult mai mare datorită frecărilor. Într-adevăr, pentru a urca pianul uniform pe planul înclinat este necesară forța

$$F = G_1 + F_f = G \sin \alpha + \mu \cos \alpha.$$

Presupunînd că $\mu = 0{,}15$, forța reală este

$$F = 324 \text{ N} + 0{,}15 \cdot 3600 \text{ N} \cdot 0{,}995 \approx 324 \text{ N} + 538 \text{ N} = 862 \text{ N}.$$

Deși numai forța de frecare este de 538 N, totuși factorul de amplificare este important $\frac{3600}{862} = 4{,}2$, motiv pentru care planul înclinat este utilizat în mod curent.

Șoselele în pantă, căile ferate în pantă, benzile transportoare (fig. 2.32) sînt exemple de planuri înclinate.

2.7.3. Scripetele

Scripetele reprezintă un mecanism alcătuit dintr-un disc prevăzut pe margine cu un șanț, pe care este trecută o frînghie. Scripetele este utilizat ca scripete fix, mobil sau în asociații de scripeți.

Fig. 2.32. Bandă transportoare.

a) *Scripetele fix* (fig. 2.33). Forța motoare $\vec{F}_m$ echilibrează forța rezistentă $\vec{G}$. În acest caz condiția de moment nul în raport cu axa O

$$F_m \cdot r = \overline{Gr}$$

arată că în condiții ideale

$$F_m = F_r, \qquad (2.10)$$

adică prin folosirea scripetelui fix forța motoare nu se amplifică dar își schimbă direcția. Frecarea determină însă o mărire a forței motoare care echilibrează forța rezistentă.

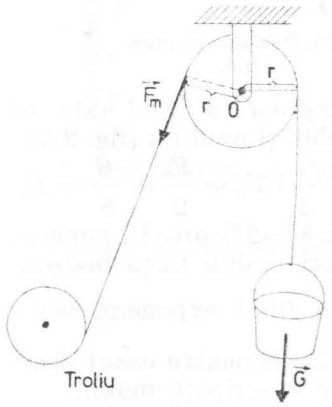


Fig. 2.33. Scripetele fix.

b) *Scripetele mobil* (fig. 2.34). Condiția de echilibru față de punctul O este

$$F_m \cdot 2r = Gr$$

sau

$$2F_m = G, \qquad (2.11)$$

adică în condiții ideale forța motoare se amplifică de două ori. De observat că de fapt multiplicarea este mai mică, deoarece la greutatea G se mai adaugă greutatea scripetelui. La aceasta trebuie să se mai adauge, în plus, frecarea.

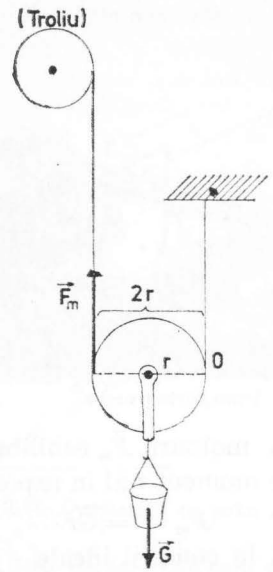


Fig. 2.34. Scripetele mobil.

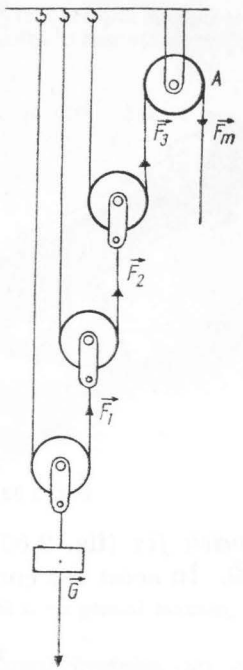


Fig. 2.35. Palanul exponențial.

c) *Sisteme de scripeți. Palanul exponențial* este un sistem de 3 scripeți asamblați ca scripeți mobili și unul fix (fig. 2.35). Relația (2.11) arată că $F_1 = \frac{G}{2}$, $F_2 = \frac{F_1}{2} = \frac{G}{4}$, $F_3 = \frac{F_2}{2} = \frac{G}{8} = F_m$. Deci o multiplicare a forței motoare F_m de $8(=2^3)$ ori. În general, printr-un astfel de sistem care are n scripeți mobili forța motoare se amplifică de 2^n ori $F_m = \frac{G}{2^n}$. Numărul n fiind exponent, sistemul se numește *exponențial*. Calculul a fost făcut pentru cazul ideal, adică neglijînd frecările și greutatea celor n scripeți mobili.

Palanul simplu (fig. 2.36, *a*, *b*, *c*) este alcătuit din două mufle (armături), asociație de scripeți aranjați pe aceeași furcă (fig. 2.36, *c*). Se observă că sarcina totală G este egală cu suma tensiunilor din fire.

$$G = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6.$$

Dar $T_1 = T_2$; $T_3 = T_4$; $T_5 = T_6$, iar $T_2 = T_3$ și $T_4 = T_5$, deoarece scripeții muflei de jos sînt mobili, iar cei ai muflei de sus sînt ficși. Rezultă că $G/6 = T_1$, și cum forța motoare $F_m = T_1$, se observă

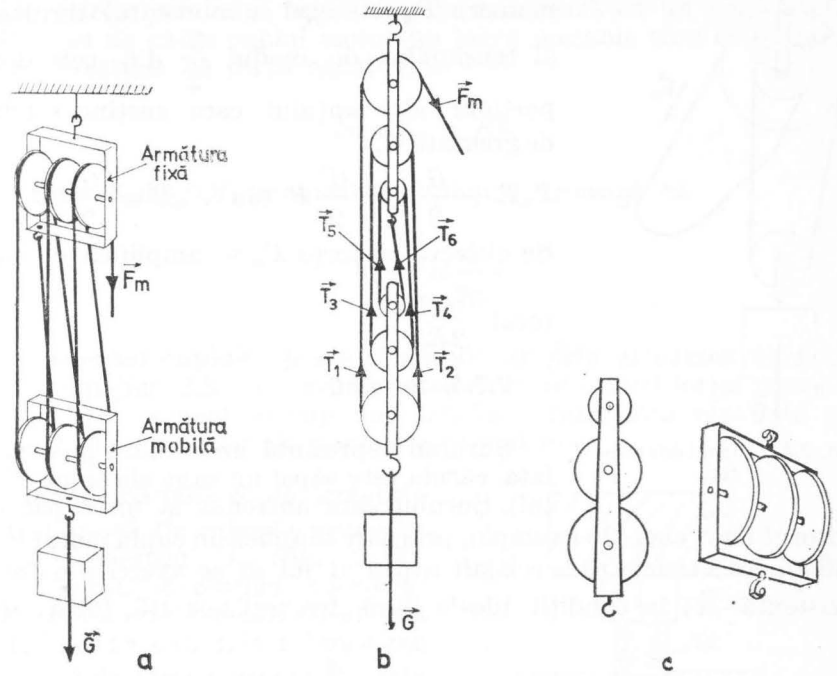


Fig. 2.36. Palanul simplu în două variante (a și b) cu mufle diferite (c).

că, în condiții ideale, fără frecare și cu scripeți de greutate neglijabilă,

$$F_m = \frac{G}{6} = \frac{G}{2 \cdot 3}.$$

În general, în aceleași condiții, mufla avînd n scripeți, palanul multiplică forța motoare de $2 \cdot n$ ori

$$F_m = \frac{G}{2 \cdot n}.$$

Palanul diferențial. Lanțul fără sfîrșit L este trecut peste dinții șanțurilor scripeților de rază R și r care se rotesc solidar (fig. 2.37). Lanțul L susține și scripetele mobil. Trăgînd în sensul arătat, sarcina se ridică. La echilibru, momentul forței motoare $\vec{F}_m$ este egal cu momentul rezultant al tensiunilor de modul $\frac{G}{2}$ din cele două porțiuni ale lanțului care susține sarcina de greutate $\vec{G}$.

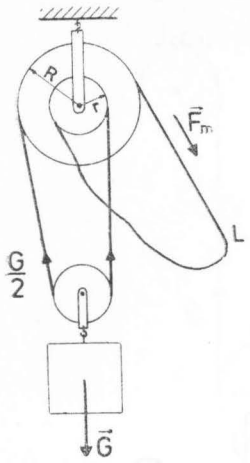


Fig. 2.37. Planul diferențial.

$$F_m R + \frac{G}{2} r = \frac{G}{2} R \text{ sau } F_m R = \frac{G}{2}(R-r).$$

Se observă că forța F_m se amplifică cu factorul $\frac{R-r}{2R}$.

2.7.4. Șurubul

Șurubul reprezintă un cilindru pe suprafața căruia este săpat un șanț elicoidal (filetul). Șurubul este antrenat la un capăt cu ajutorul unei chei, de exemplu, prin care se aplică un cuplu motor (fig. 2.38 *a*), cee a ce face ca la celălalt capăt al lui să se exercite o forță rezistentă $\vec{R}$; în condiții ideale (fără frecare) această forță este

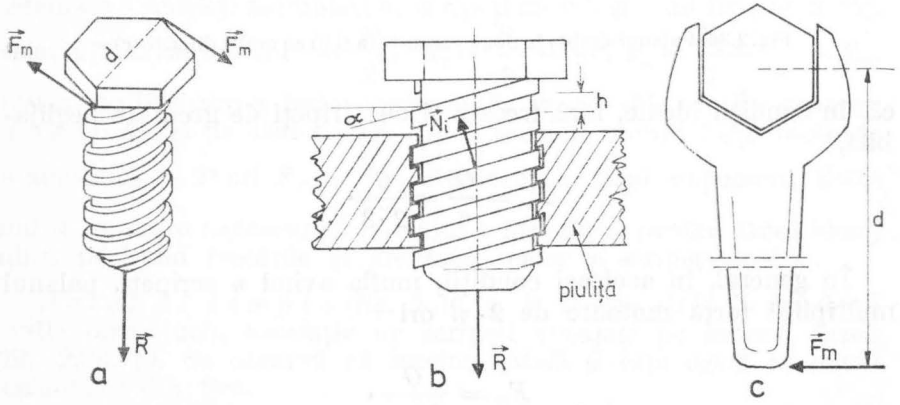


Fig. 2.38. Șurubul.

egală cu suma forțelor normale $\vec{N}_i$ pe filet de-a lungul întregii porțiuni comune cu filetul piuliței. Proiectînd pe axa longitudinală

$$R = \Sigma N_i \cos \alpha.$$

Prin rotirea șurubului cu 2π, acesta avansează cu un pas h, efectuîndu-se de către cuplul motor un lucru mecanic care este egal cu lucrul efectuat de forța rezistentă.

$$2\pi \, dF_m = Rh.$$

Deoarece $F_m d = M_c$ (momentul cuplului) urmează că

$$M_c = R \frac{h}{2\pi}.$$

Momentul cuplului poate fi amplificat prin utilizarea unei chei mai lungi (fig. 2.35, *c*), prin care se mărește brațul forței motoare; pentru un moment al cuplului, dat, forța rezistentă rezultată este cu atît mai mare cu cît pasul h este mai mic.

Cricul. Sarcina S de greutate $\vec{G}$ trebuie să fie ridicată prin mișcarea levierului L (fig. 2.39). Printr-o rotație completă a levierului sarcina este ridicată cu un pas h. În lipsa frecărilor, lucrul mecanic efectuat de forța motoare $\vec{F}_m$ este egal cu lucrul mecanic de ridicare

$$2\pi R F_m = Gh;$$

astfel, forța motoare se amplifică de $2\pi R/h$ ori, factor în realitate mult mai mic, deoarece frecările între piulița P și șurubul cricului (Sc) sînt adeseori mari.

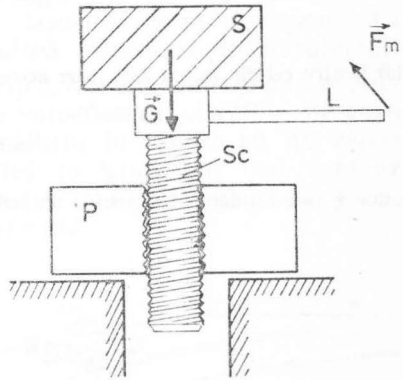


Fig. 2.39. Cricul.

2.7.5. Randamentul mecanismelor simple

În interiorul unui mecanism simplu forța motoare sau cuplul motor se transmite la ieșire sub forma unei forțe rezistente sau a unui cuplu motor rezistent. Astfel, lucrul mecanic efectuat de forța

sau cuplul motor (lucrul mecanic motor) este transmis la ieşire ca lucru mecanic rezistent (L_r). În regim staţionar cele două lucruri mecanice trebuie să fie egale. Dar această situaţie nu poate fi realizată, deoarece în interiorul oricărui mecanism există frecări, pentru compensarea cărora trebuie să se efectueze un lucru mecanic L_f. Din acest motiv

$$L_m = L_r + L_f.$$

Pentru funcţionarea unei maşini este important raportul L_r/L_m numit *randament* η

$$\eta = \frac{L_r}{L_m} = \frac{L_m - L_f}{L_m} = 1 - \frac{L_f}{L_m} = 1 - \varphi$$

unde $\frac{L_f}{L_m} = \varphi$ este numit *coeficient de pierdere*. Randamentul este deci întotdeauna subunitar.

Exemple. Pentru palanul din figura 2.35 forţa motoare este

$$F_m = \frac{G}{2\eta}\left(1 - \frac{r}{R}\right),$$

iar pentru cel din figura 2.36 între aceleaşi elemente există relaţia

$$F_m = \frac{(1 - \eta^k)G}{1 - \eta}$$

unde η este randamentul pentru un scripete, iar k, numărul de scripeţi.

3

CINEMATICA

3.1. Definirea mişcării şi repausului

Cînd privim strada, un lucru ne atrage atenţia în mod deosebit, animaţia ei. Oamenii se deplasează faţă de case, faţă de copaci sau unii faţă de alţii. Vehiculele circulă. Călătorii stau sau se mişcă în raport cu autobuzele în care călătoresc.

Raportînd poziţia unei persoane care stă într-un autobuz la călătorii care sînt aşezaţi pe scaune, aceasta apare în repaus. În raport însă cu casele, călătorul se mişcă împreună cu autobuzul.

Pentru a decide dacă un corp se mişcă, sau nu, trebuie să-i raportăm poziţia la alte obiecte pe care le considerăm „fixe" şi pe care le numim *repere*. Un corp este în mişcare în raport cu un reper dacă distanţa lui la reper se modifică în timp. În caz contrar corpul este în repaus. Pentru înlesnirea studiului alegerea reperelor trebuie făcută în mod convenabil.

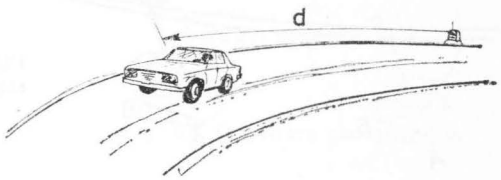


Fig. 3.1. Pentru precizarea poziţiei la un moment dat se alege un reper.

Exemple. Dacă un automobil se deplasează pe o şosea, se poate alege ca reper unul din obiectele aflate pe drum sau pe marginea acestuia (un copac, o bornă kilometrică). Poziţia vehiculului la un moment dat va putea fi precis determinată prin distanţa măsurată pe şosea între automobil şi reperul ales (fig. 3.1).

Poziţia unui vapor nu poate fi stabilită într-un mod asemănător. Alegînd ca reper un port oarecare exprimarea distanţei faţă de port nu dă posibilitatea determinării precise

a poziției. Există nenumărate locuri, aflate la această distanță de port, în care s-ar putea afla vasul. De aceea, se alege un sistem de două distanțe față de Ecuator și de primul meridian, adică *o latitudine* și *o longitudine* (fig. 3.2). În mișcare, cel puțin una din aceste coordonate se modifică cu timpul.

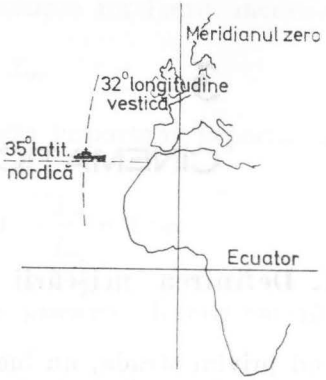


Fig. 3.2. Precizarea poziției în acest caz necesită două numere.

A cunoaște mișcarea unui corp înseamnă a ști în orice moment care este poziția lui față de reperul ales.

3.2. Mișcarea de rotație, mișcarea de translație

Mișcarea unui corp poate fi în general complicată. În exemplele următoare sînt descrise cîteva cazuri.

1°. Mișcarea unei telecabine are caracteristic faptul că orice segment construit din două puncte oarecare ale cabinei se mișcă paralel cu el însuși (fig. 3.3, *a*). O astfel de mișcare, numită *mișcare de translație*, execută și un ascensor, un piston în cilindru etc. Important este faptul că orice punct al corpului care efectuează o translație se mișcă în același fel (fig. 3.3). Evident că într-o astfel de mișcare este suficient să se studieze deplasarea unui singur punct.

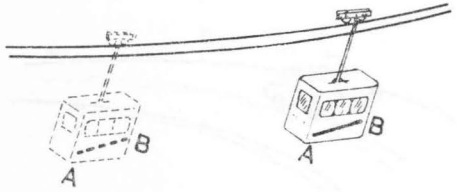


Fig. 3.3. O mișcare de translație. Orice segment rămîne paralel cu el însuși.

La momente succesive punctul în mișcare ocupă poziții diferite. Curba formată din toate aceste puncte se numește *traiectorie*. În

mișcarea de translație traiectoria oricărui punct este deci aceeași și poate fi considerată ca traiectorie a corpului.

Mișcarea corpurilor în translație poate fi deci descrisă prin mișcarea unui singur punct.

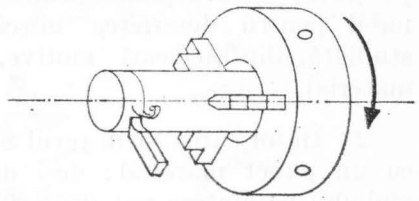


Fig. 3.4. O mișcare de rotație. Orice punct se mișcă pe un cerc.

2°. Toate punctele unei piese care este strunjită efectuează o mișcare circulară în jurul axei. Punctele de pe axă rămîn deci în repaus. O astfel de mișcare se numește *mișcare de rotație* (fig. 3.4).

Tot în mișcare de rotație se află acele unui ceasornic, rotorii mașinilor electrice, roțile dințate ale diferitelor angrenaje etc.

Se poate dovedi că orice mișcare oricît de complicată poate fi descompusă într-o succesiune de mișcări de translație și de rotație. Numeroase exemple pot ilustra afirmația.

Exemple. Mișcarea șurubului din figura 3.5 între pozițiile *a* și *b* este compusă dintr-o translație cu 1,5 pași și o rotație cu 3·180°;

Mișcarea bielei între cele două poziții (fig. 3.6) poate fi considerată ca fiind alcătuită dintr-o rotație cu 30° și o translație de 3 cm.

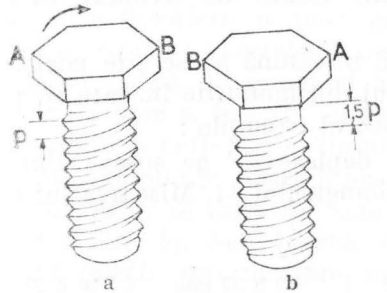


Fig. 3.5. O mișcare elicoidală.

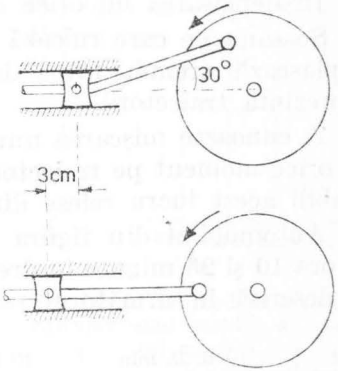


Fig. 3.6. O mișcare plan-paralelă.

3.3. Ce este un mobil?

În funcție de problemă, pentru a simplifica studiul unor mișcări este util și corect să se considere corpul ca un singur *punct material*. În acest caz, corpul îl vom numi *mobil*. În următoarele exemple sînt analizate cîteva cazuri.

1°. Mișcarea unui automobil pe o șosea. Importantă este poziția la un moment dat a automobilului. Întrucît distanțele între punctele mașinii sînt mult mai mici față de distanța de la reper măsurată pe șosea, oricare punct al automobilului poate fi ales la fel de convenabil pentru descrierea mișcării. Mișcarea unui tren, poate fi studiată, din aceleași motive, considerînd trenul ca un punct material.

2°. În mișcarea sa în jurul Soarelui, Pămîntul poate fi considerat ca un punct material; deși distanțele între diferitele puncte ale globului pămîntesc pot fi mari (de ordinul miilor de kilometri), ele sînt totuși neglijabile în comparație cu depărtarea Pămînt-Soare (150 000 000 km), care se ia în considerație pentru stabilirea poziției Pămîntului în raport cu Soarele*.

3.4. Descrierea mișcării

În deplasarea lui orice mobil descrie o anumită traiectorie.

Șoseaua pe care rulează un autovehicul, linia ferată pe care se deplasează trenul, urma de condens lăsată de avionul în zbor, reprezintă traiectorii.

A cunoaște mișcarea unui mobil înseamnă să se știe poziția lui în orice moment pe traiectorie. Unul din modurile în care se poate stabili acest lucru reiese din următorul exemplu:

Automobilul din figura 3.7 se deplasează pe șosea aflîndu-se la ora 10 și 25 minute în dreptul kilometrului 64. Mișcarea lui poate fi descrisă în următorul tabel:

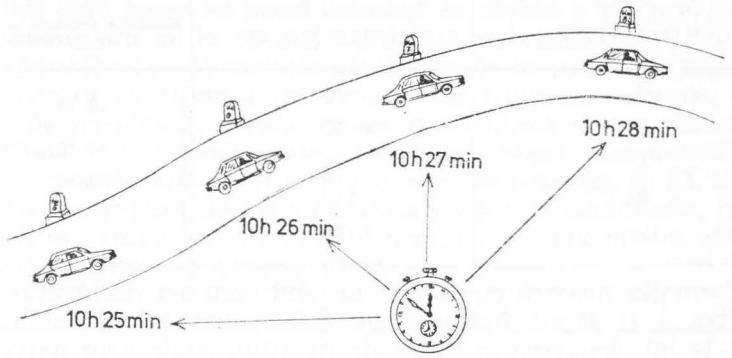
t	10 h 25 min	10 h 26 min	10 h 27 min	10 h 28 min
poziția	64 km	65 km	66 km	67 km

Dacă, de exemplu, se măsoară timpul cu un cronometru pornit exact la ora 10 și 25 min și se măsoară pe traiectorie

* Se arată, în dinamică, faptul că indiferent de mișcarea Pămîntului deplasarea lui în jurul Soarelui se face ca și cum întreaga masă ar fi concentrată în centrul său.

distanța automobilului față de borna kilometrică 64, tabelul anterior ia forma

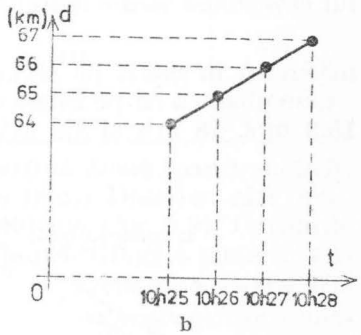
t[min]	0	1	2	3
poziția [km]	0	1	2	3



a

cu observația că în acest caz trebuie să se specifice în ce parte se deplasează automobilul, deoarece există două puncte aflate la distanțe egale de borna 64. Aici, ca și în orice descriere a unei mișcări, s-a ales o *origine a spațiului* și o *origine a timpului*, adică un punct și un moment de la care a început măsurătoarea distanței și respectiv a timpului.

Poziția mobilului poate fi observată și pe un grafic alcătuit în baza tabelului (fig. 3.7, *b*). Se observă că lipsesc informații intermediare momentelor trecute în tabel.



b

Fig. 3.7. *a*) Un mod de a descrie mișcarea unui mobil; *b*) graficul mișcării.

Scopul oricărui studiu al mișcării este să se stabilească o relație care să exprime poziția mobilului la orice moment oarecare t.

3.5. Viteza unui mobil

Automobilul parcurge o porțiune de șosea. La un moment dat se află într-un punct A, iar după un timp s-a deplasat într-un alt

punct B situat la 120 m de A. Nu se știe modul în care s-a făcut mișcarea între A și B. Un mod de a ne îmbogăți informația este să stabilim poziția automobilului în momente intermediare. Următorul tabel înregistrează aceste măsurări.

Momentul [s]	Distanța de la A [m]	Distanța parcursă în intervale egale de timp
0	0	10 m
3	10	46 m
6	56	54 m
9	110	10 m
12	120	

Informația noastră cu privire la felul cum s-a desfășurat mișcarea între A și B s-a îmbunătățit. Știm acum că automobilul nu s-a mișcat la fel, deoarece în intervale de timp egale s-au parcurs distanțe diferite. O mărime care descrie cît de repede se mișcă mobilul este *viteza medie* definită prin

$$s/t = \bar{v},$$

măsurată în metri pe secundă. Pe AB, $\bar{v} = 10$ m/s.

Se observă că pe intervale viteza medie a fost respectiv 3,3 *m/s*, 15,3 m/s, 18 m/s și 3,3 m/s.

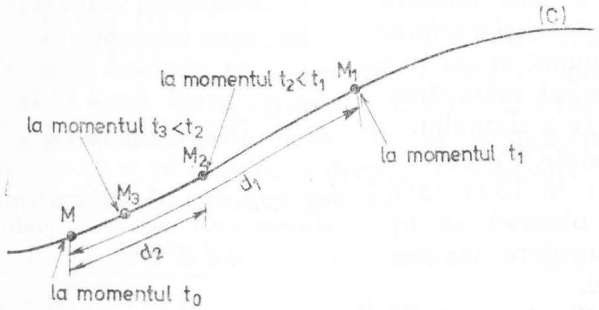


Fig. 3.8. Un mod de a calcula viteza la un moment dat t_0. Se calculează $\bar{v}$ pe intervale din ce în ce mai mici începînd cu t_0.

Desigur, ideal ar fi să știm *în orice moment* viteza mobilului (*viteza momentană*).

Modul cum se poate proceda pentru a fi calculată viteza momentană se observă pe figura 3.8.

Presupunem că la momentul t_0 în care vrem să calculăm viteza, automobilul se află într-un punct M. După un interval de timp

îl observăm în punctul M_1. Calculînd cîtul între arcul MM_1 și intervalul de timp scurs obținem $\bar{v}_1$, viteza medie pe acest drum. Dacă am surprinde mobilul într-un punct M_2 mai apropiat de M, am calcula viteza medie $\bar{v}_2$ pe un interval mai mic, începînd cu momentul cînd automobilul se afla în M. Micșorînd și mai mult intervalele care încep cu acest moment se obține o valoare, pentru viteza medie, din ce în ce mai apropiată de viteza în punctul M, întrucît posibilitatea de variație devine din ce în ce mai redusă datorită micșorării continue a intervalelor de timp considerate.

Este de observat că dacă viteza momentană este constantă în timp atunci viteza medie este aceeași cu viteza momentană.

Viteza momentană, ca și viteza medie, se măsoară în SI în m/s. În funcție de ordinul de mărime unitățile pot fi modificate, pentru comoditatea exprimării. În tabelul următor se dau cîteva exemple de ordine de mărime pentru viteze.

	Viteza		Viteza
creșterea ierbii	10^{-7} m/s	sunetul	330 m/s
alunecarea unui ghețar	10^{-4} m s	avion supersonic	500 m/s
melc, omidă	10^{-3} m/s	cartuș	500 m/s
pieton	1,2 m/s		
cicloturist	5 m/s	rachete	10^4 m/s
sprinter (100 m plat)	10 m's		
mingea de tenis	40 m/s	lumina	$3 \cdot 10^8$ m/s
rîndunică	80 m/s		

Viteza momentană se măsoară cu *vitezometrul*. Acest aparat poate fi, din punct de vedere constructiv, de diferite feluri. Descriem aici funcționarea vitezometrului utilizat la autovehicule (fig. 3.9). Corpurile *1* și *1'* se îndepărtează în funcție de forța centrifugă a piesei *2*, antrenată cu o turație oarecare prin intermediul unui cablu, iar culisa *3* acționează pîrghia *4* mișcînd sectorul dințat *5* care rotește acul indicator *6* al vitezometrului.

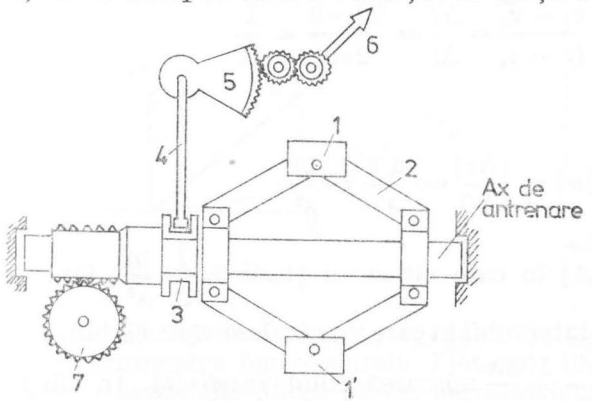


Fig. 3.9. Vitezometru.

Observație. Știind poziția și viteza la un moment dat ale unui mobil, starea de mișcare este complet caracterizată.

Viteza este o mărime fizică vectorială. Vectorul viteză este tangent traiectoriei în fiecare punct (fig. 3.10). Picăturile de apă de pe roţile autovehiculelor, scînteile polizorului se desprind tangenţial.

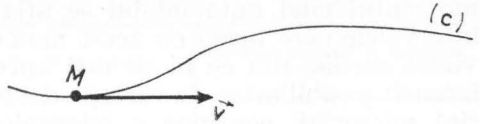


Fig. 3.10. Vectorul viteză.

3.6. Acceleraţia

În tabelul următor sînt înregistrate vitezele unui tren în cîteva momente din intervalul de timp în care acesta parcurge distanţa dintre două staţii, momentul iniţial fiind momentul plecării dintr-una din staţii

t[min]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v[m/s]	0	5	10	15	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	5	0

Se observă creşterea vitezei de la zero la valoarea de 20 m/s care rămîne constantă timp de 9 min, după care viteza descreşte pînă la zero. Modul în care se face variaţia vitezei este descris de *acceleraţia medie*, definită prin raportul diferenţei între viteza la sfîrşitul şi la începutul intervalului şi intervalul de timp în care s-a produs variaţia

$$\bar{a} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20 - 0}{240} = \frac{1}{12}$$

măsurată în unitatea

$$[\bar{a}] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = \frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Pe intervalul $t \in [0,4]$ în care viteza creşte $\bar{a} = \frac{1}{12}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, iar mişcarea este *accelerată*. Pe intervalul în care viteza descreşte $t \in [13,\ 15]$ $\bar{a} = \frac{0\ \text{m/s} - 20\ \text{m/s}}{120\ \text{s}} = -\frac{1}{6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ mişcarea fiind *încetinită*. În sfîrşit,

în intervalul în care viteza este constantă $t \in [4,\ 13]$, $\bar{a} = 0$; mişcarea este uniformă ($v = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{const.}$)

Exemplu. O rachetă lansată de la sol atinge viteza de 1 764 km/h în 4 secunde. Care este acceleraţia medie?

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1\,764 \cdot 10^3\ \text{m}}{4 \cdot 3\,600\ s^2} = 122{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 12\ g,$$

adică de 12 ori acceleraţia gravitaţională.

Întrucît acceleraţia este determinată de variaţia vectorului viteză, rezultă că această mărime este de asemenea un vector cu aceeaşi direcţie şi sens ca şi vectorul variaţie a vitezei $\overrightarrow{\Delta V}$

$$\bar{a} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}.$$

Acceleraţia la un moment dat se numeşte *acceleraţia momentană*. Vectorul acceleraţie momentană se poate descompune după două direcţii : una tangentă şi cealaltă normală la traiectorie. Prima este numită *acceleraţie tangenţială*, cea de-a doua *acceleraţie normală*. Aceste două mărimi măsoară variaţiile vitezei după cele două direcţii (fig. 3.11).

Aparatele de măsură a acceleraţiei momentane se numesc *accelerometre*. În principiu, un astfel de instrument se bazează pe forţa de inerţie care apare în

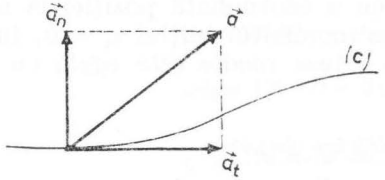


Fig. 3.11. Vectorul acceleraţie.

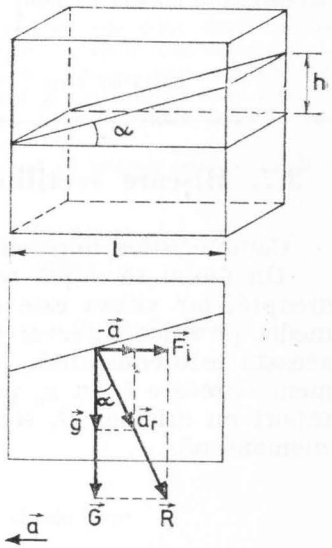


Fig. 3.12. Un accelerometru simplu.

urma accelerării sau frînării (vezi §4.5). În figura 3.12 este schiţat un accelerometru foarte simplu. Lichidul din cutie se înclină astfel încît suprafaţa liberă să fie perpendiculară pe rezultanta din-

tre greutate și forța de inerție. Mărimea unghiului α este dependentă de accelerația a

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{g} = \frac{h}{l} \text{ sau } a = g \operatorname{tg}\alpha = \frac{g}{l}h.$$

Cu alte cuvinte cunoscînd g/l ca o constantă a aparatului se poate etalona aparatul în unități de accelerație prin măsurarea directă a lui h.

Clasificarea mișcărilor. În schema următoare se face o clasificare a mișcărilor, criteriile fiind traiectoria și accelerația:

Criteriul		Mișcarea
Traiectoria →	O dreaptă	rectilinie
	O curbă oarecare	curbilinie
Accelerația → diferită de zero	variabilă	variată
	constantă	uniform (a>o) accelerată; variată (a<o) încetinită
egală cu zero		uniformă

3.7. Mișcare rectilinie uniformă

Caracteristica mișcării este $a = 0$. Deci $v = \text{const}$.

Un mobil se mișcă rectiliniu și uniform cînd traiectoria este o dreaptă, iar viteza este constantă. În acest tip de mișcare viteza medie pe orice interval este egală cu viteza momentană deoarece aceasta este constantă. Notînd cu x coordonata poziției la un moment oarecare t, cu x_0 poziția la momentul inițial $t_0 = 0$, luate în raport cu originea O, scriem că viteza medie este egală cu viteza momentană

$$\frac{x - x_0}{t - t_0} = \bar{v} = v$$

sau

$$x - x_0 = v(t - t_0)$$

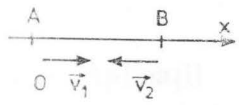
și pentru că $t_0 = 0$.

$$x = x_0 + vt \qquad (3.1)$$

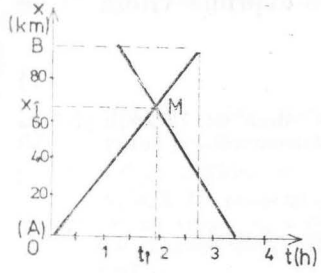
Dacă originea coordonatelor se alege în punctul în care mobilul se afla la momentul inițial relația, precedentă devine

$$x = vt. \qquad (3.1')$$

Exemplu. Două trenuri se deplasează în sens contrar între două stații A și B, legate prin linie dublă și aflate la 100 km una de cealaltă. Unul pleacă din A la ora 5 și 30 min și sosește în B la ora 8; celălalt pleacă din B la 6 și 30 min și sosește în A la ora 9. Să se determine locul și ora întîlnirii celor două trenuri.



a



b

Fig. 3.13. Reperul și soluția grafică a problemei întîlnirii trenurilor.

Mișcările sînt uniforme. Alegem ca origine a timpului, de exemplu, ora de plecare a primului tren din A, loc pe care îl stabilim și ca origine a spațiului (fig. 3.13, *a*). Ecuația de mișcare a primului tren este aplicînd relația (3.1')

$$x_1 = v_1 t, \qquad (a)$$

iar a celui de-al doilea

$$x_2 = 100\,000 - v_2\,(t - 3\,600), \qquad (b)$$

S-a notat cu v_1 și v_2 vitezele celor două trenuri și s-a considerat v_2 negativ, fiind în sens contrar axei. Spațiul inițial al celui de-al doilea tren este 100 km (100 000 m), iar timpul pentru același tren este cu 3 600 secunde mai mic, deoarece pleacă față de momentul inițial cu o oră întîrziere.

Se observă din enunț că vitezele celor două trenuri sînt gale

$$v_1 = v_2 = v = \frac{100\,000 \text{ m}}{3600 \cdot 2{,}5 \text{ s}} = 10{,}1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

La întîlnire $x_1 = x_2 = x_i$. Înlocuind și ținînd seama de (a) și (b) rezultă succesiv

$$vt_i = 100\,000 - vt_i - 3600\ v$$

$$2vt_i = 100\,000 + 3\,600\ v$$

$$t_i = \frac{100\,000 + 3\,600\ v}{2v} = 1 \text{ h } 52 \text{ min } 30 \text{ s};$$

deci trenurile se întîlnesc la ora 7.22 min 30 s și la 68,18 km de A, așa cum reiese înlocuind pe t_i de expresia lui x_1.

Grafic, problema este rezolvată în figura 3.13, b. Ecuația fiecărei mișcări este o dreaptă. Punctul de intersecție M corespunde soluției sistemului, format de ecuațiile (a) și (b), deci momentului (t_i) și punctului (x) de întîlnire.

3.8. Mișcarea rectilinie uniform variată

Ecuația vitezei. Caracteristica mișcării este $a = \text{const}$. Rezultă că accelerația medie este egală cu accelerația momentană. Scriem acest lucru notînd cu v_0 viteza inițială (viteza la momentul inițial t_0) și cu v viteza la un moment dat t.

$$\bar{a} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = a$$

sau

$$v = v_0 = at - at_0$$

și punînd $t_0 = 0$ se obține relația vitezei care exprimă viteza la un moment dat t

$$v = v_0 + at. \tag{3.2}$$

Exemplu. Un autoturism Dacia 1 300 frînează de la viteza de 72 km/h pînă la oprire în intervalul de timp de 4 s. Ce accelerație suportă conducătorul auto?

Întrucît $v = 0$, din relația (3.2) rezultă

$$a = -\frac{v_0}{t} = -\frac{72 \text{ km/h}}{4\text{s}} = -\frac{20 \text{ m/s}}{4 \text{ s}} = -5 \text{ m/s}^2$$

ceea ce înseamnă aproximativ jumătate din accelerația gravitațională. Dacă necesitatea obligă și timpul în frînare trebuie să fie mai scurt accelerația crește la valori care justifică cerința de a purta centură de siguranță. Acest lucru se întîmplă cu certitudine în cazurile, nedorite desigur, de ciocnire.

Ecuația de mișcare. Se demonstrează că poziția unui mobil este dată de relația

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \tag{3.3}$$

Mărimile care intervin sînt pozitive sau negative în funcție de reperul ales pentru studiul fiecărei probleme. Următorul exemplu și cele din paragraful următor lămuresc modul cum se aplică relațiile (3.2) și (3.3) pentru rezolvarea unei probleme de mișcare rectilinie uniform variată.

Exemplu. Distanța de frînare din exemplul precedent este

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} at^2$$

unde s-a luat $x_0 = 0$ considerînd că se măsoară x_0 din locul unde a început frînarea ($a < 0$). Înlocuind, se obține

$$x = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4 \text{ s} - \frac{1}{2} 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 16 \text{ s}^2 = 80 \text{ m} - 40 \text{ m} = 40 \text{ m}.$$

Este bine ca șoferul să cunoască posibilitățile de frînare ale mașinii sale!

3.9. Aplicații

a) *Mișcarea corpurilor pe verticală sub acțiunea cîmpului gravitațional.* Considerăm că deplasarea se face pe distanțe mici astfel încît se poate considera* că

$$a = g = \text{const}.$$

Mișcarea fiind uniform variată, poziția mobilului este dată de legea 3.3 Această lege, împreună cu relația vitezei rezolvă problemele legate de mișcarea pe verticală.

Exemple. 1. Un proiectil este lansat vertical cu viteza $v_0 = 450$ m/s. Ce înălțime maximă poate atinge și în cît timp?

În punctul cel mai de sus $v = 0$. Alegem (fig. 3.14, *a*) axa orientată vertical în sus, cu originea la sol. Aplicînd relația (3.2) ($0 = v_0 - gt$) se obține timpul de urcare $t_u = \frac{v_0}{g} =$

$= 45$ s $\left(\text{luînd } g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$.

Înălțimea maximă la care se ridică proiectilul se află aplicînd legea (3.3), în care $x_0 = 0$, $a = g$ și $t = t_u$

$$x_{max} = v_0 t_u - \frac{1}{2} g t_u^2 = 10\,135 \text{ m},$$

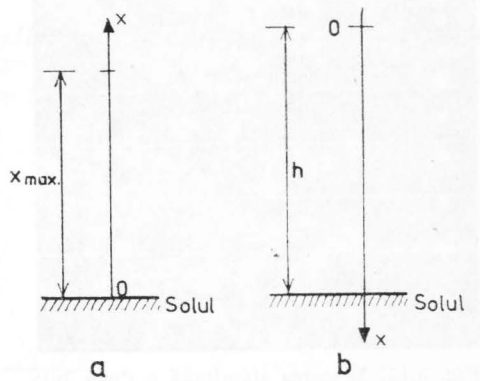


Fig. 3.14. Pentru exemplul de calcul.

înălțimea pînă la care aproximația $g \approx 10$ m/s^2 este încă destul de corectă.

2. Un corp cade liber pe sol de la înălțimea de 12 m. Cît durează căderea și cu ce viteză ajunge pe sol?

* Vezi relația (4.4). La suprafața Pămîntului se ia pentru accelerația gravitațională valoarea standard $g_0 = 9{,}8$ m/s^2 la 45° latitudine și la nivelul mării.

Se consideră ecuațiile (3.2) și (3.3) și se alege axa vertical în jos, cu originea în punctul în care corpul e lăsat liber (fig. 3.14, *b*). Ecuațiile devin

$$x = \frac{1}{2} g t_c^2 \text{ și } v = g t_c.$$

Din prima relație se obține timpul de coborîre

$$t_c = \sqrt{\frac{2x}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 12}{9{,}8}} \text{ s} = 1{,}56s,$$

iar din a doua, viteza la sol

$$v = 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 1{,}56 = 15{,}29 \text{ m/s}.$$

b) *Aruncarea sub un anumit unghi.* În figura 3.15 se observă că două bile, una lăsată să cadă pe verticală, cealaltă lansată simultan pe orizontală, ajung în același timp pe sol. Se mai vede că pe verticală pozițiile momentane ale celor două bile sînt aceleași, iar deplasarea proiecției orizontale este uniformă. Rezultă că mișcarea bilei lansate pe orizontală poate fi descompusă în două mișcări componente: una pe verticală, uniform accelerată cu accelerația g și alta pe orizontală, uniformă. Această observație experimentală va duce la aplicarea ecuațiilor (3.1), (3.2) și (3.3) pentru rezolvarea oricărei probleme de acest fel.

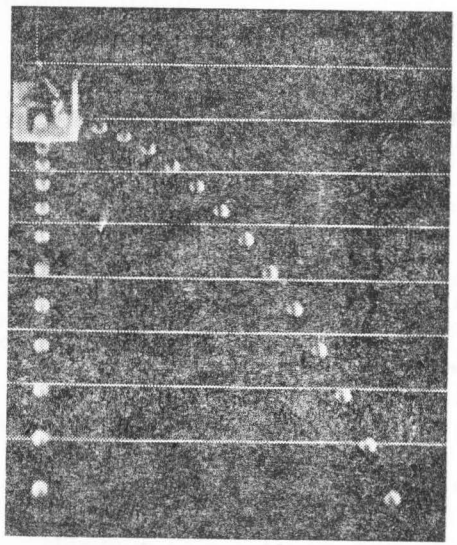


Fig. 3.15. Mișcarea simultană a două bile în cîmp gravific: una pe verticală, cealaltă lansată pe orizontală.

Exemplu. *Mișcarea unui proiectil.* Proiectilul este lansat cu viteza $\vec{v}_0$ sub un unghi α. (fig. 3.16). Conform celor spuse, descompunem mișcarea în două componente:

— *pe verticală*, o mișcare uniform variată cu viteza inițială $v_0 \sin \alpha$. Aplicînd relația (3.3) se obține

$$y = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2} g t^2;$$

— *pe orizontală*, o mișcare uniformă care se desfășoară după legea (3.1)

$$x = (v_0 \cos\alpha)t.$$

Eliminînd t, obținem ecuația traiectoriei

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x \operatorname{tg} \alpha$$

care este o parabolă (fig. 3.16) cu vîrful în V. Distanța OA se numește *bătaie*

$$OA = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

și este maximă pentru $\sin 2\alpha = 1$ sau $2\alpha = 90°$, $\alpha = 45°$, ceea ce dă

$$OA_{max} = v_0^2 / g$$

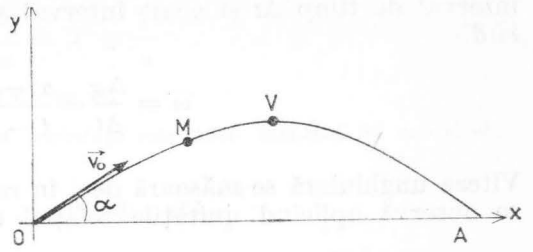


Fig. 3.16. Proiectilul lansat sub un unghi α față de orizontală.

distanță care este în realitate desigur mai mică, deoarece nu s-au luat în calcul frecările.

3.10. Mișcarea circulară uniformă

Orice punct al unui corp aflat în mișcare de rotație se deplasează pe un cerc sau pe un arc de cerc (fig. 3, 17, *a*). Mișcarea a cărei traiectorie este un cerc se numește *mișcare circulară*.

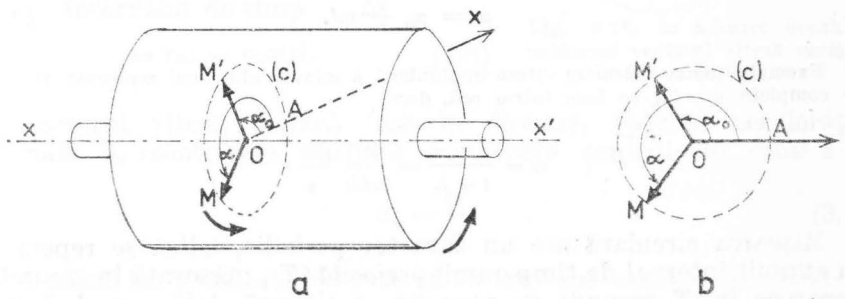


Fig. 3.17. Oricare punct al unui corp care se rotește se mișcă pe un cerc C (*a*). Poziția punctului poate fi descrisă de unghiul α (*b*).

Poziția mobilului M la un moment dat este determinată prin raza cercului în punctul M, numită *raza vectoare* (fig. 3.17, *b*). Se alege arbitrar o semidreaptă de referință OA față de care se măsoară unghiul α măturat de raza vectoare, AOM, în sensul arătat

în figură și care, prin convenție, se ia pozitiv. Dacă mobilul se mișcă uniform parcurge arce egale în intervale egale de timp, ceea ce înseamnă că va mătura unghiuri la centru egale în intervale egale de timp. Raportul dintre unghiul $\Delta\alpha$ măturat de raza vectoare într-un interval de timp Δt și acest interval se numește *viteză unghiulară medie*

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\alpha - \alpha_0}{t - t_0}. \tag{3.4}$$

Viteza unghiulară se măsoară deci în radiani pe secundă, după cum se observă aplicînd unitățile relației de definiție

$$[\omega] = \frac{[\Delta\alpha]}{[\Delta t]} = \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Radianul (rad) este o unitate de unghi (de arc). Unghiul la centru este de un radian dacă subîntinde un arc egal cu raza cercului. Unghiul în jurul unui punct (cerc întreg) are 2π radiani. Deci unghiul (arcul) de 1 radian este egal cu 57,3°.

Într-o mișcare circulară uniformă viteza unghiulară este constantă. Putem să aplicăm definiția (3.4) pentru un interval oarecare care începe cu momentul inițial ($t_0 = 0$). Rezultă legea de mișcare

$$\alpha = \alpha_0 + \omega t. \tag{3.5}$$

Exemplu. Să se calculeze viteza unghiulară a minutarului unui ceasornic. O rotație completă $\alpha = 2\pi$ se face într-o oră, deci

$$\omega = \frac{\alpha - \alpha_0}{t - t_0} = \frac{2\pi}{3600}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Mișcarea circulară are un caracter periodic, adică se repetă la un anumit interval de timp numit *perioadă* (T), măsurată în secunde. Deoarece în T secunde se parcurge o singură dată cercul, într-o secundă mișcarea se va repeta de $1/T$ ori. Mărimea

$$\nu = 1/T \tag{3.6}$$

se numește *frecvență de rotație* și se măsoară în s^{-1}, $[\nu] = \frac{1}{[T]} = s^{-1}$.

În tehnică frecvența unei mișcări circulare (rotație) se numește *turație* și se notează cu litera n. Turația se măsoară în $\frac{\text{rot}}{\text{min}}$ sau $\frac{\text{rot}}{\text{s}}$.

Viteza unghiulară este legată de frecvența de rotație prin relația

$$\frac{2\pi}{\omega} = T = \frac{1}{\nu} \tag{3.7}$$

sau

$$2\pi\nu = \omega.$$

Exemplu. Turația unei instalații centrifuge este 8000 ture/min. Să se calculeze viteza unghiulară

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 8\,000/60 = 837\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Transformarea unei turații exprimată în ture pe minut în rotații pe secundă se face după relația

$$n\ \frac{\text{ture}}{\text{min}} = n\ \frac{\text{rotații}}{\frac{1}{60}\ \text{s}} = 60\ n\ \frac{\text{rotații}}{\text{s}}.$$

Modulul vitezei tangențiale a punctului material în mișcare uniformă pe un cerc de rază r este (fig. 3.18)

$$v = \frac{\text{arcul parcurs } (AB)}{\text{intervalul de timp}} = \frac{r\alpha}{\Delta t} = r\omega = \text{const.} \tag{3.8}$$

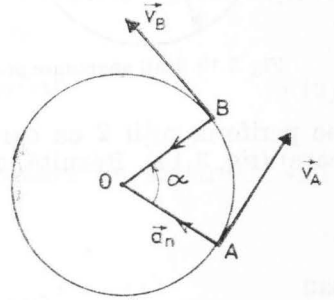


Fig. 3.18. În mișcare circulară uniformă vectorul viteză variază în direcție.

Vectorul viteză variază însă în direcție, apărînd accelerația normală $\vec{a}_n$ (centripetă) dirijată deci către centrul de rotație O

$$a_n = \frac{v^2}{r}. \tag{3.9}$$

Exemplu. Într-o instalație centrifugă pentru antrenarea cosmonauților brațul pe care este montată cabina are lungimea de 4 m. La o turație de numai 21 $\frac{\text{ture}}{\text{min}}$ ($\nu = 0{,}35\,s^{-1}$) accelerația suportată este

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = 4\pi^2\nu^2 r = 4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 0{,}35^2 \cdot 4 = 19{,}32\ \frac{m}{s} = 2g$$

deci de două ori mai mare decît accelerația gravitațională standard.

3.11. Aplicație. Raportul de transmisie

a) Transmiterea mișcării de rotație de la un arbore la altul se poate face prin *frictiune* sau prin roți dințate. *a)* Roata *1* de diametru d_1, care se mișcă avînd turația n_1. Viteza unui punct de la periferia ei este $(d_1/2)\ \omega_1$, aceeași cu viteza $(d_2/2)\omega_2$ a unui punct de

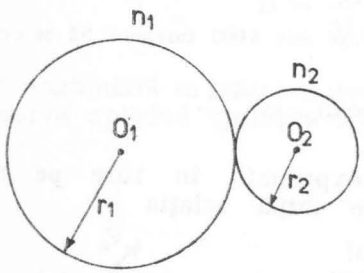


Fig. 3.19. Roți angrenate prin frictiune.

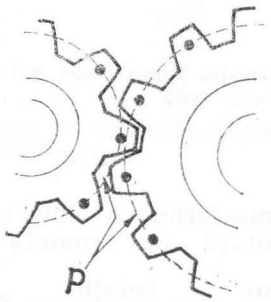


Fig. 3.20. Angrenaj cu dinți.

pe periferia roții 2 cu care este angrenată prin frecare (fără alunecare) (fig. 3.19). Rezultă, aplicînd relația (3.8),

$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2$$

sau

$$2\pi\nu_1 r_1 = 2\pi\nu_2 r_2$$

și

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

b) În cazul *roților dințate* intervalul p dintre doi dinți consecutivi de pe cele două roți este același (fig. 3.20)

$$p = \frac{\pi d_1}{Z_1} = \frac{\pi d_2}{Z_2} \tag{3.10}$$

unde d_1, d_2 și Z_1, Z_2 sînt diametrale, respectiv numărul de dinți, pentru cele două roți. Rezultă

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{Z_1}{Z_2}.$$

Dacă turațiile sînt n_1 și n_2, atunci deoarece $n_1 Z_1 = n_2 Z_2$ avem

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{3.11}$$

În ambele cazuri n_2/n_1 constituie raportul de transmisie între roata conducătoare *1* și cea condusă *2*.

3.12. Accelerația unghiulară. Mișcarea circulară uniform variată

În această mișcare viteza unghiulară variază uniform cu timpul. Pentru descrierea variației vitezei unghiulare se introduce noțiunea de *accelerație unghiulară* definită pentru acest tip de mișcare prin

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} = \text{const.} \tag{3.12}$$

Semnificația raportului este variația vitezei unghiulare în unitatea de timp.

Unitatea de măsură este

$$[\varepsilon] = \frac{[\Delta\omega]}{[\Delta t]} = \frac{\frac{\text{rad}}{\text{s}}}{\text{s}} = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Dacă $\omega_0 = 0$ la $t_0 = 0$ atunci la un moment dat t

$$\omega = \varepsilon t,$$

iar dacă la $t_0 = 0$, $\omega = \omega_0$ atunci la momentul t

$$\omega = \varepsilon t + \omega_0. \tag{3.13}$$

Observînd analogia completă între definițiile vitezei și accelerației liniare, pe de o parte, și a vitezei și accelerației unghiulare. Pe de altă parte, se poate scrie ecuația mișcării circulare uniform variate

$$\alpha = \alpha_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2. \tag{3.14}$$

În această relaţie ε este pozitiv sau negativ, după cum mişcarea este accelerată sau încetinită faţă de sensul considerat pozitiv al unghiului α.

Exemplu. O elice de ventilator se roteşte cu 600 rot/min. Dacă se întrerupe curentul, elicea continuă să se rotească 1 000 de ture pînă la oprire. Să se calculeze acceleraţia unghiulară şi timpul în care se opreşte.

Înlocuind timpul din relaţia 3.13 în ecuaţia (3.14) se obţine

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\varepsilon\alpha$$

de unde
$$\varepsilon = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\alpha} = \frac{\pi}{10}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2},$$

iar timpul
$$t = \frac{\omega_0 - \omega}{\varepsilon} = 3 \text{ min } 20 \text{ s}.$$

(S-a pus: $\varepsilon < 0$ şi $\omega = 0$)

4

DINAMICA

4.1. Legea întîi (legea inerţiei)

Experienţa arată că nu există corp aflat în repaus care să înceapă să se mişte fără ca asupra lui să se acţioneze din exterior. De asemenea, se constată că orice corp aflat în mişcare rectilinie şi uniformă continuă să se mişte rectiliniu şi uniform atît timp cît asupra lui nu se acţionează din exterior. Aceste observaţii descriu o însuşire pe care o au toate corpurile din natură. Proprietatea se numeşte *inerţie*.

Proprietatea de inerţie este în general diferită la corpuri diferite. Se ştie că este relativ uşor de a pune în mişcare un autoturism şi mult mai greu un autobuz. De asemenea, este mult mai dificil de a frîna un tren decît un autocamion care are aceeaşi viteză. Este extrem de uşor de a schimba direcţia unei mingi de ping-pong şi destul de greu să se facă acelaşi lucru cu o minge de tenis. Legea întîi a dinamicii exprimă faptul că toate corpurile din natură au inerţie.

În absenţa interacţiunii orice corp continuă să rămînă în repaus sau se mişcă în continuare rectiliniu şi uniform.

Masa corpului este o mărime fizică prin care se măsoară din punct de vedere fizic inerţia corpului*. Cu cît masa corpului este mai mare cu atît este mai dificil să se provoace schimbarea stării de mişcare. Unitatea de măsură a masei în SI este kilogramul (kg). Masa corpului se măsoară cu *balanţa*.

---

* În fizică, intervin masa inerţială şi masa gravifică. În măsurarea proprietăţilor inerţiale se are în vedere masa inerţială. Întrucît se dovedeşte experimental că pentru un anumit corp cele două mase au aceeaşi valoare, în această carte nu se va face nici o diferenţiere între cele două mărimi.

Exemple. 1. La pornirea sau la oprirea unui vehicul și la schimbarea direcției de mișcare călătorii se simt împinși în spate, în față sau în exteriorul curbei în care se angajează vehiculul.

În cazul în care accelerația este mare în autoturisme sau în avioane călătorii trebuie protejați prin centuri de siguranță.

2. Fixarea unui ciocan sau a unui topor în coadă se face prin batere (fig. 4.1). Ciocanul continuă mișcarea în timp ce coada se oprește.

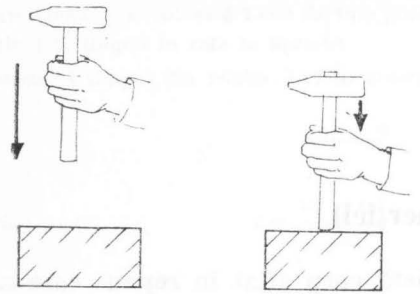


Fig. 4.1. Inerția ciocanului determină fixarea lui.

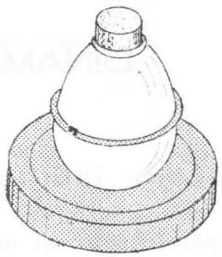


Fig. 4.2. Puc cu zăpadă carbonică.

Verificarea acestei legi este legată de realizarea izolării mecanice complete a unui corp, adică eliminarea oricărei interacțiuni, ceea ce este imposibil. De aceea, la concluzia exprimată în lege se ajunge observînd ce se întîmplă făcînd experimental încercarea de a reduce cît mai mult interacțiunile și deducînd logic consecințele posibile ale eliminării acestora. De exemplu, pucul* din figura 4.2 este lansat pe o suprafață orizontală. Frecarea determină micșorarea vitezei și oprirea pucului după parcurgerea unui drum rectiliniu de o anumită lungime. Lansat pe suprafețe orizontale din ce în ce mai lucii, frecarea micșorîndu-se treptat, pucul parcurge distanța din ce în ce mai mari. Dacă în rezervorul de deasupra discului se pune zăpadă carbonică și se lansează pucul, între puc și suprafața orizontală se interpune un strat subțire de vapori de CO_2 care micșorează frecarea încît nu se mai poate observa frînarea discului decît cu instrumente speciale și pe distanțe foarte mari.

4.2. Legea a doua a dinamicii

Mărimea care descrie modificarea stării de mișcare este accelerația. Așadar, o forță aplicată determină o accelerație. Legătura dintre forța $\vec{F}$ aplicată unui corp de masă constantă m și accelerația $\vec{a}$ care rezultă este exprimată prin legea a doua a dinamicii

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (4.1)$$

care, punînd-o sub forma $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$, relevă faptul că *accelerația imprimată unui corp are aceeași orientare, și este direct proporțională cu forța aplicată și este invers proporțională cu masa corpului.*

Exemplu Un autoturism avînd masa de 1000 kg frînează pînă la oprire (în B) în 40 m, de la viteza de 20 m/s (în A). Care este forța de frînare cu care șoseaua acționează asupra autoturismului?

Din relația $v^2 = v_0^2 + 2as$ (fig. 4.3) rezultă accelerația

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \frac{0 - 400}{2 \cdot 40} = -5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2};$$

aplicînd legea (4.1) se obține $F = ma = 1\,000\ \text{kg} \cdot 5\ \text{m/s}^2 = 5\,000\ \text{N}$.

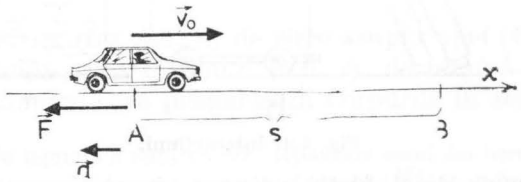


Fig. 4.3. Pentru exemplul de calcul.

Verificarea legii se face pe cale experimentală. Trebuie să se țină seama de faptul că, în expresia legii, prin $\vec{F}$ se înțelege rezultanta tuturor forțelor care acționează asupra corpului (vezi exemplul de la pagina 81). Legea (4.1) se mai numește și legea fundamentală a dinamicii, deoarece, aplicînd-o direct sau prin consecințele care decurg din ea se poate determina mișcarea. Cunoscînd forțele și masa corpului, rezultă legea de mișcare, problemă esențială a dinamicii.

Legea (4.1) poate fi privită și ca relație de definiție a forței. Unitatea de măsură a forței este newtonul (N), denumită astfel în onoarea marelui fizician englez Isaac Newton (1643—1727)

$$1\,\text{N} = 1\,\text{kg} \cdot 1\,\text{m/s}^2.$$

* Disc masiv de cauciuc, care se utilizează la hochei.

4.3. Legea a treia a dinamicii

În natură uu există acțiuni mecanice unilaterale. Forța care se aplică unui corp este numai un aspect al interacțiunii. Oricărei acțiuni i se răspunde simultan cu o reacțiune, orice corp care acționează asupra altuia este supus la rîndul lui la o reacțiune din partea acestuia.

Exemple. 1. Un corp care se află pe o masă acționează asupra mesei care la rîndul ei reacționează exercitînd o forță asupra corpului (fig. 4.4, *a*).

2. Un cărucior este împins de un om care exercită o forță asupra căruciorului. Omul simte reacțiunea căruciorului prin apăsarea pe care mînerul o exercită asupra mîinilor lui (fig. 4.4., *b*)

3. Pe două discuri de lemn care plutesc într-un vas cu apă se află pe unul un magnet, iar pe celălalt o bară de fier moale. Se observă deplasarea ambelor discuri unul spre celălalt. Magnetul acționează asupra barei, bara acționează asupra magnetului (fig. 4.4, *c*).

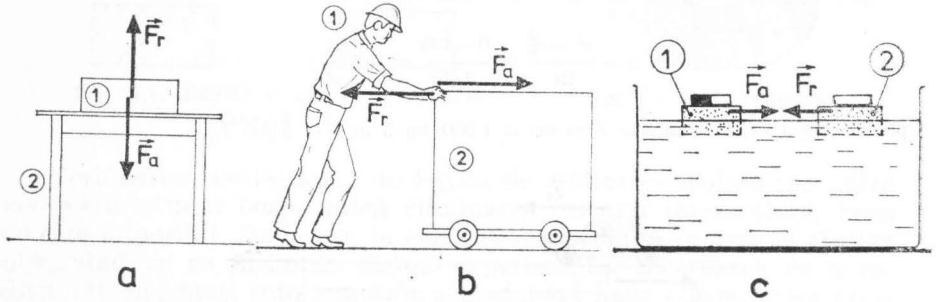


Fig. 4.4. Interacțiuni.

Măsurarea celor două forțe, *acțiunea* și *reacțiunea*, este ușoară. Cele două dinamometre indică (fig. 4.5) aceleași valori A măsurînd modulul forței cu care barcagiul trage parîma, iar B forța cu care

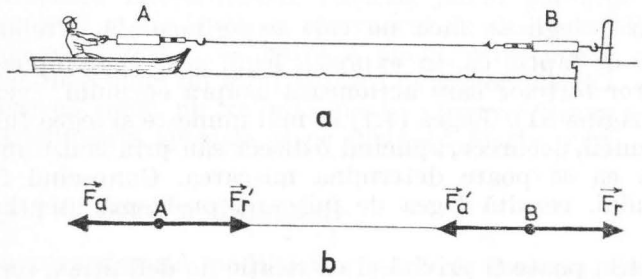


Fig. 4.5. Măsurarea acțiunii și reacțiunii.

stîlpul de pe mal acționează asupra bărcii. Newton a observat existența simultană a acțiunii și a reacțiunii, stabilind că: *orice forță pe care o exercită un corp asupra altui corp (acțiunea) este însoțită simultan de o forță opusă pe care cel de al doilea corp o exercită asupra primului (reacțiunea).*

Legea a treia a dinamicii are numeroase aplicații tehnice. Mișcarea oricărui vehicul este, de fapt, o consecință a apariției forței de reacțiune (fig. 4.6). Acțiunile exercitate de gazele ejectate asupra

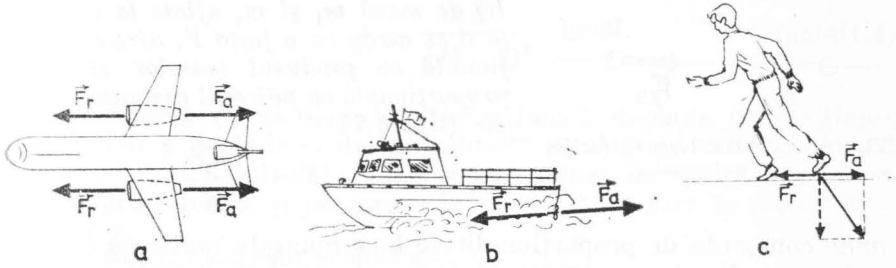


Fig. 4.6. Propulsia ca rezultat al interacțiunii.

aerului atmosferic (fig. 4.6, *a*) de elice asupra apei (4.6, *b*) de piciorul alergătorului asupra solului (4.6, *c*), determină apariția simultană a reacțiunilor care propulsează corpurile în sens opus.

Observație. În figura 4.5 forța cu care acționează omul din barcă este $\vec{F}_a$. Acțiunea este aplicată indirect stîlpului prin intermediul frînghiei ($\vec{F}_a'$). Această forță are ca pereche reacțiunea $\vec{F}_r$ care la rîndul ei se transmite omului și bărcii sub forma $\vec{F}_r'$. Numai dacă frînghia este în echilibru (în repaus sau mișcare rectilinie și uniformă) $\vec{F}_a' = \vec{F}_a$ și $\vec{F}_r = \vec{F}_r'$. În acest caz se poate spune că forțele F_a și F_r se transmit integral de-a lungul firului. Forțele $\vec{F}_a$ și $\vec{F}_r$ acționează asupra aceluiași corp, frînghia. Ele nu constituie perechea acțiune reacțiune. *Acțiunea și reacțiunea se aplică la corpuri diferite.* Astfel de perechi pot fi considerate $\vec{F}_a$ și $\vec{F}_r'$, $\vec{F}_a'$ și $\vec{F}_r$.

4.4. Tipuri de forțe

Legea a doua a dinamicii arată legătura între forță și accelerație. Determinarea legii de mișcare se face aplicînd această relație după ce se cunoaște expresia forței care intervine. În acest paragraf se studiază cîteva tipuri de forțe mai importante, urmînd ca ulterior să se studieze și alte tipuri.

4.4.1. Greutatea

Între două corpuri oarecare din natură se exercită o interacțiune care se manifestă prin forțe reciproce de atracție de natură mecanică. Această interacțiune numită gravitațională, este descrisă de *legea gravitației universale* descoperită de Isaac Newton. Legea are următorul enunț:

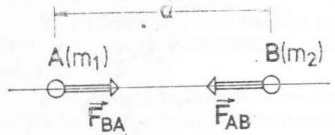


Fig. 4.7. Pentru legea atracției universale.

Două puncte materiale oarecare (A și B) de masă m_1 și m_2 aflate la o distanță d se atrag cu o forță F, direct proporțională cu produsul maselor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele (fig. 4.7).

$$F = k\frac{m_1 m_2}{d^2} \qquad (4.2)$$

unde constanta de proporționalitate k se numește *constanta atracției universale*. Newton a arătat că legea atracției universale se aplică și pentru cazul a două sfere omogene considerînd că întreaga masă m se concentrează într-un punct, în centrul sferei. Este cazul corpurilor cerești cu această formă. Valoarea constantei determinată experimental prin măsurarea forței gravitaționale între două corpuri sferice de mase cunoscute așezate la o distanță cunoscută este*

$$k = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$$

Exemplu. Să se calculeze forța cu care Soarele ($M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg) atrage Pămîntul ($M_P = 6 \cdot 10^{24}$kg) care se află la distanța medie de aproximativ $15 \cdot 10^{10}$m.

Din legea (4.2) rezultă

$$F = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{kg^2}}\ \frac{2 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg} \cdot 6 \cdot 10^{24}\mathrm{kg}}{(15 \cdot 10^{10})^2 \mathrm{m^2}} = 3{,}559 \cdot 10^{23}\ \mathrm{N}$$

Dacă masa Pămîntului este M atunci putem constata că în raport cu planeta noastră orice corp de masă m aflat la înălțimea h deasupra nivelului mării este atras cu o forță, pe care o numim *greutatea* lui, orientată spre centrul Pămîntului.

$$G = \frac{kM}{(R+h)^2} \cdot m \qquad (4.3)$$

* Din relația (4.2) rezultă $k = \frac{Fd^2}{m_1 m_2}$ și aplicînd unitățile în SI se obține $[k] = \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$.

Notînd cu g expresia $\frac{kM}{(R+h)^2}$ putem scrie $G = mg$ se numește *intensitatea cîmpului gravitațional* în punctul în care se afla corpul de masă m, și deoarece relația (4.3) este de forma $F = ma$ factorul $\frac{kM}{(R+h)^2}$ fiind analogul și avînd unitățile unei accelerații*, g se mai numește și *accelerație gravitațională*.

$$g = \frac{kM}{(R+h)^2} \cdot \qquad (4.4)$$

Se observă că accelerația gravitațională depinde de înălțimea h. Întrucît g depinde și de latitudine** se alege o valoare standard g_0 pentru $h = 0$ (nivelul mării) și latitudinea de 45° la care să se poată face referire, și pe care o luăm în considerare în calcul $g_0 = 9{,}80$ m/s.

Exemple. 1. Un elicopter se înalță uniform accelerat cu accelerația de 4 m/s² ridicînd într-o operație de salvare un om a cărui masă este de 80 kg. Ce tensiune suportă frînghia de susținere? ($g = 9{,}81$ m/s²). Aplicînd legea (4.1) se obține (fig. 4.8.)

$$T - G = ma$$

$$T = mg + ma = 80\ \mathrm{kg}.\ 9{,}80\ \mathrm{m/s^2} + 80\ \mathrm{kg} \cdot 4\mathrm{m/s^2} = 1104\ \mathrm{N}.$$

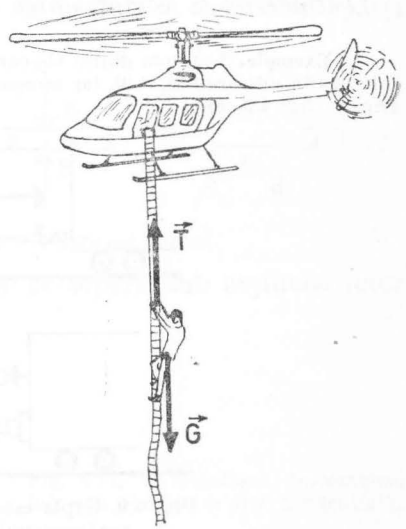


Fig. 4.8. Tensiunea din cablu e mai mare decît greutatea omului ridicat.

O forță mai mare decît greutatea omului întrucît este necesară accelerarea pe verticală în sus.

2. La ce distanță de sol accelerația gravitațională se reduce la jumătatea din valoarea standard?

Scriem condiția pusă : $g = \frac{g_0}{2}$ și, utilizînd relația (4.4), obținem

$$\frac{g}{g_0} = \frac{\dfrac{kMp}{(R_p+h)^2}}{\dfrac{kM_p}{R_p^2}} \text{ sau } \frac{1}{2} = \frac{(R_p)^2}{(R_p+h)^2}\cdot$$

* $[g] = \frac{[k]\ [M]}{[\mathrm{R}+h]^2} = \frac{\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot kg}}{\mathrm{m^2}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kh}} = \frac{\mathrm{kg \cdot m/s^2}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$

** Motive : a) Raza Pămîntului variază cu latitudinea, b) Intervine forța centrifugă, maximă la ecuator și nulă la pol. Acest din urmă motiv este esențial.

Rezolvînd ecuația (în care $R_p = 63 \cdot 10^5$ m) în raport cu h și eliminînd soluția negativă care nu are sens fizic, avem

$$h = R_p(1 + \sqrt{2}) = 151{,}83 \cdot 10^5 \text{m}.$$

În tabelul următor sînt înscrise rapoartele între accelerațiile gravitaționale la suprafața altor planete ale sistemului solar și valoarea g_0 la suprafața Pămîntului :

Jupiter	2,37	Saturn	0,90	Pluton	?
Neptun	1,40	Venus	0,89	Luna	0,16
Pămîntul	1	Mercur	0,40		
Uranus	0,97	Marte	0,39		

4.4.2. Forța elastică

1°. *Solicitări.* Cînd un element al unui mecanism, o piesă oarecare este supusă unui sistem de forțe se spune că *este solicitată*. Există cîteva solicitări simple :

Întinderea și comprimarea

Exemple. 1. Cupla dintre vagoane este supusă la o forță de întindere cînd trenul este pus în mișcare (fig. 4.9), iar tampoanele sînt supuse unor forțe de compresiune la frînare (fig. 4.9, *b*).

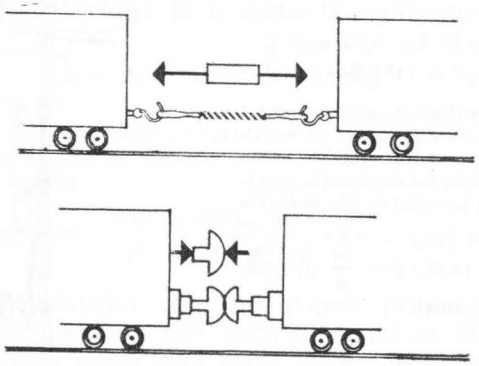


Fig. 4.9. Cupla este solicitată la întindere (*a*), iar tamponul, la compresiune (*b*).

2. Firele care susțin cîrligul unei macarale sînt întinse (fig. 4.10, *a*), iar stîlpii unui pod sînt comprimați (fig. 4.10, *b*).

Solicitarea de întindere se caracterizează prin tendința de alungire, iar acea de comprimare prin tendința de scurtare a piesei sau a elementului solicitat. În solicitările de întindere și de comprimare forțele au același suport, dar sînt de sens opus (fig. 4.9 și 4.10). Forța de întindere se mai numește *tensiune*.

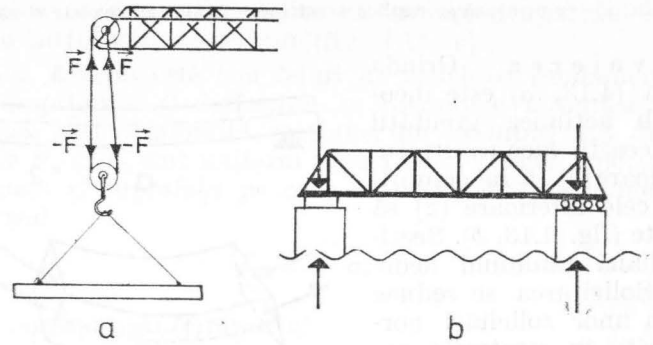


Fig. 4.10. Firele sînt întinse (*a*), stîlpul este comprimat (*b*).

Forfecarea. Exemplu. Foarfeca ghilotină din figura 4.11, *a* acționează prin lamele foarfecii în planul secțiunii AA' a foii de tablă cu două forțe opuse. Caracteristic este faptul că cele două părți

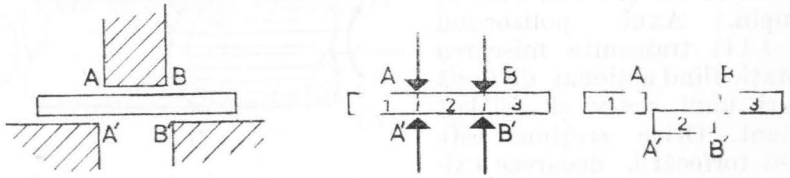


Fig. 4.11. Foarfeca-ghilotină și forțele care acționează.

adiacente pe secțiunea AA' alunecă și se separă sub acțiunea unor forțe tangențiale la suprafață.

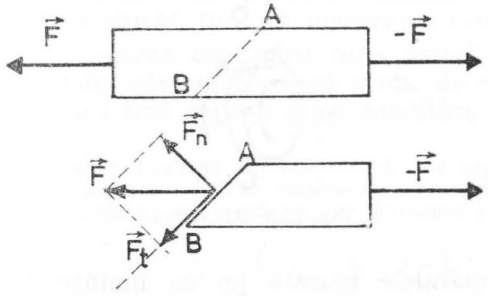
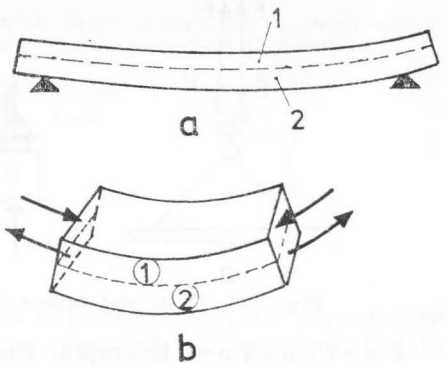


Fig. 4.12. O solicitare descompusă într-una normală și alta tangențială.

Observație. Considerăm o bară aflată în echilibru supusă de întindere. Orice secțiune AB a barei se află în echilibru (fig. 4.12). Descompunînd forța $\vec{F}$ după două direcții,

una tangențială și alta normală la suprafață se obțin forțele $\vec{F}_n$ și $\vec{F}_t$. Orice tip de solicitare poate fi descompusă pe baza unor considerații asemănătoare în solicitări normale sau tangențiale. În cele ce urmează se explică acest lucru pentru încovoiere și răsucire.

Încovoierea. Grinda din figura (4.13, *a*) este încovoiată sub acțiunea greutății proprii. Aceasta face ca straturile superioare (*1*) să fie comprimate, iar cele inferioare (*2*) să fie alungite (fig. 4.13, *b*). Secțiunea mediană rămînînd nedeformată. Solicitarea se reduce la apariția unor solicitări normale diferite în straturile paralele cu secțiunea mediană și la eforturi tangențiale între straturile de acest fel vecine.



Fibg. 4.13. Încovoierea.

Răsucirea (torsiunea)
Exemplu. Axul polizorului (fig. 4.14) transmite mișcarea de rotație fiind acționat de două cupluri unul activ și celălalt rezistent. Orice secțiune este supusă forfecării, deoarece există cîte un cuplu pereche corespunzător oricărei secțiuni. Aceasta se observă ușor pe o vergea

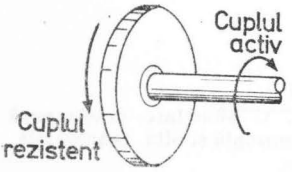


Fig. 4.14. Axele sînt supuse torsiunii.

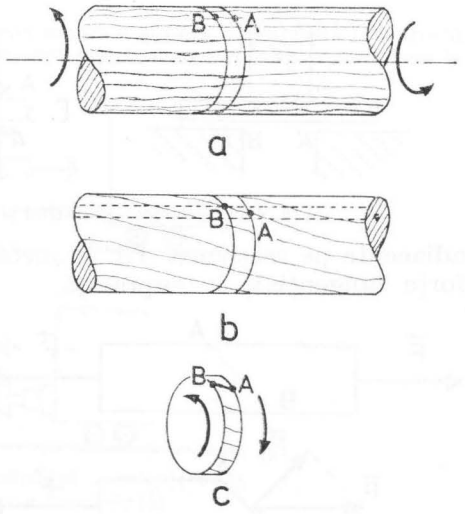


Fig. 4.15. Răsucirea.

de cauciuc din faptul că liniile paralele trasate pe ea înainte de răsucire (fig. 4.15, *a*) se deformează după torsionare ca în figura 4.15, *b*. Punctele, inițial vecine, A și B de pe o generatoare ajung, în final, pe generatoare diferite.

Acest lucru nu se poate întîmpla decît dacă cele două secțiuni vecine cărora le aparțin punctele A și B alunecă una în raport cu cealaltă, ceea ce se poate admite ca urmare a apariției solicitării tangențiale între aceste secțiuni (fig. 4.15, *c*).

Pentru a descrie cele trei feluri de solicitări fundamentale, întindere, comprimare și forfecare, se introduce noțiunea de efort unitar. Dacă într-o anumită secțiune, de exemplu AB din figura 4.12, forțele F_n și F_b sînt uniform repartizate, atunci raportul dintre forța normală și suprafața pe care ea acționează se numește *efort unitar normal*

$$F_n/S = \sigma_n$$

și în mod corespunzător raportul

$$F_t/S = \sigma_t$$

se numește *efort unitar tangențial*. Ambele mărimi se măsoară în $\frac{N}{m^2}$ așa cum se observă din relația

$$[\sigma] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{N}{m^2}.$$

2°. *Legea lui Hooke.* Corpurile supuse solicitărilor se deformează sub acțiunea forțelor. Corpul poate reveni sau nu la forma inițială. În primul caz deformația se numește *elastică*, în caz contrar se numește *plastică*. Este important să se studieze modul cum se deformează un material pentru a-i cunoaște comportarea în cazul utilizării lui ca element într-un mecanism sau într-o construcție.

În vederea efectuării unui astfel de studiu se construiesc din materialul care interesează probe de o anumită formă numite *epruvete*, care sînt supuse unor solicitări.

Exemple. 1. Proba din figura 4.16, este supusă întinderii (sau compresiunii). Ca urmare, epruveta, inițial de lungime l_0, se alungește pînă la lungimea l. Pentru a descrie deformarea corespunzătoare se introduce raportul

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} = \varepsilon_r.$$

numit *alungire relativă* care are semnificația fizică de alungirea unității de lungime.

2. Proba din figura 4.17 este supusă *alunecării*. În raport cu baza AB, fața BC, s-a deplasat în $B'C'$ alunecînd pe o distanță d.
Raportul

$$d/h = \operatorname{tg}\varphi$$

descrie deformarea la alunecare. Întrucît φ este unic $d/h \approx \varphi$.

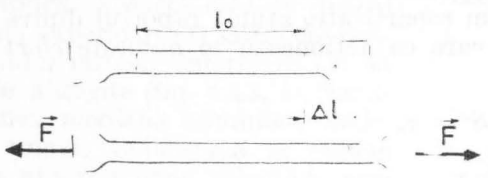


Fig. 4.16. O epruvetă supusă la întindere.

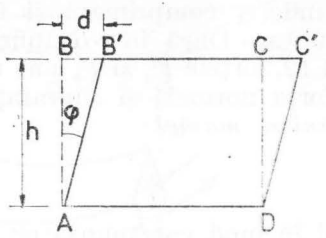


Fig. 4.17. Alunecarea.

Supunînd o epruvetă, construită dintr-un metal ductil unei solicitări de întindere se înregistrează alungirea relativă ε_r în funcție de efortul unitar normal σ_n. Un grafic tipic pentru un astfel de material (de ex. oțelul) este cel din figura 4.18. Se observă comportarea diferită în funcție de valoarea efortului unitar.

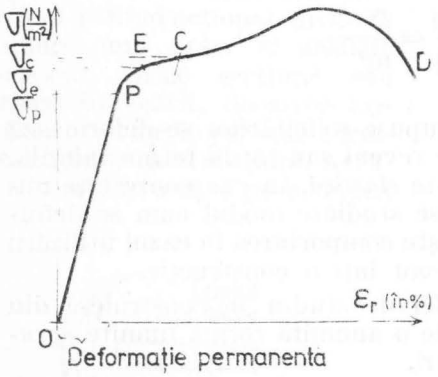


Fig. 4.18. Curba alungirii relative în funcție de efortul unitar normal la o probă de tipul arătat în fig. 4.16.

În intervalul în care $0 < \sigma_n < \sigma_p$ alungirea relativă este proporțională cu efortul unitar normal (OP este un segment de dreaptă), adică

$$\frac{F}{S} = E\,\frac{\Delta l}{l_0},$$

unde E este un coeficient de proporționalitate care depinde de material așa cum se explică mai jos. Relația mai poate fi scrisă sub forma

$$F = \frac{ES}{l_0}\Delta l = k\Delta l \qquad (4.5)$$

în care k este *constanta de elasticitate a materialului* (sau constanta elastică) pentru motivul că în intervalul $0 < \sigma_n < \sigma_e$ dacă efortul încetează materialul revine la forma inițială, *are o comportare elastică*. De regulă, în acest interval nu se produc alungiri relative mai mari de 1%. Relația (4.5) se numește *legea lui Robert Hooke* (1635—1703). Valabilitatea ei rămîne deci pentru eforturi unitare care produc deformații pînă la limita de proporționalitate adică pentru $0 < \sigma < \sigma_p$. Întrucît experimentele de întindere sau de compresiune arată că pentru un material dat un anumit efort unitar produce întotdeauna o aceeași alungire relativă, raportul între efortul unitar și alungirea relativă este o constantă caracteristică numită *modulul lui Young* și notată cu E

$$(F/S)/(\Delta l/l_0) = E.$$

E se mai numește și modul de elasticitate. Deoarece ε_r este un număr

$$[E] = [\sigma] = \mathrm{N/m^2}$$

În tabelul următor se dau valorile modulului de elasticitate pentru cîteva materiale

Materialul	E, în N/m²
Aluminiu	$7 \cdot 10^{10}$
Oțel	$2 \cdot 10^{11}$
Fier	$1{,}9 \cdot 10^{11}$
Plumb	$1{,}5 \cdot 10^{10}$
Cupru	10^{11}
Sticlă	$5{,}8 \cdot 10^{10}$

Valorile lui E depind de tratamentul termic al materialului. În afară de aceasta, valorile înscrise sînt de fapt o medie, deoarece de obicei proba este compusă din multe cristale mici orientate la întîmplare.

Observații : a) În relația (4.5), expresia $\frac{ES}{l_0}$ a fost înlocuită prin k. Constanta de elasticitate este introdusă și preferată în locul lui E deoarece modulul de elasticitate este o constantă care depinde exclusiv de material și nu de geometria corpului supus solicitării. De exemplu, dintr-un material dat se pot construi bare, fire, resorturi etc.

Relația (4.5) se aplică și pentru un resort care este întins sau comprimat în care efortul este pur tangențial. Forța F care respectă legea lui Hooke se numește *forță elastică*.

b) Dacă materialul este solicitat mai mult ($\sigma_e < \sigma_n$) deformațiile devin permanente. Materialul descărcat revine pe o altă curbă (cea punctată), rămînînd cu o alungire permanentă. Între E și D materialul se comportă plastic. În punctul D epruveta se rupe.

Exemple 1. Un fir de telefon de Cu de lungime egală cu 125 m și cu raza de 10^{-3} m este întins pînă la lungimea de 125,25 m prin aplicarea unei forțe de 800 N. Care este modulul lui Young al materialului?

Aria secțiunii este

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = 3{,}14 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2$$

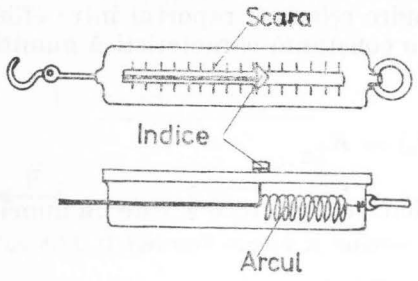


Fig. 4.19. Un dinamometru cu arc elicoidal.

Conform definiției modulului

$$E = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta l}{l_0}} = \frac{\frac{800\ \text{N}}{3{,}14 \cdot 10^{-6}\text{m}^2}}{\frac{0{,}25\ \text{m}}{125\ \text{m}}} = 1{,}27 \cdot 10^{11}\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2},$$

aproximativ egal cu cel dat în tabelul precedent.

2. Un arc spiralat are lungimea de 30 cm cînd este întins de o forță de 40,2 N și lungimea de 37 cm cînd este întins cu o forță de 45,2 N. Care este constanta elastică a resortului?

Forța suplimentară $F = 5$ N produce o alungire de 7 cm; conform legii lui Hooke (4.5) se scrie

$$k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{5}{0{,}07} = 71\ \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Pe baza relației (4.5), cunoscînd alungirea unui resort, se poate măsura forța. *Dinamometrul* este instrumentul cu care se efectuează această operație (fig. 4.19).

4.4.3. Forța de frecare

Frecarea prin alunecare. Între suprafețele corpurilor aflate în contact se exercită forțe de frecare. Din următoarele două exemple rezultă că frecarea se manifestă atît cînd corpurile sînt în repaus relativ cît și cînd ele se deplasează unele în raport cu celelalte.

Pe un plan înclinat se află o ladă în repaus. Întrucît componenta $\vec{G}_t$ în lungul planului are tendința de a produce alunecarea, se deduce existența unei alte forțe care se opune (fig. 4.20). Aceasta este forța de frecare $\vec{F}_f$.

Pe un plan orizontal o persoană împinge în mișcare uniformă un dulap (fig. 4.21). Sub acțiunea forței $\vec{F}$ dulapul ar trebui să fie deplasat accelerat dar forța de frecare $\vec{F}_f$ orientată *întotdeauna* în sens opus vitezei, produce echilibrarea ei astfel încît accelerația rezultantă este nulă.

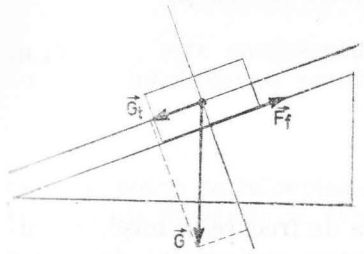


Fig. 4.20. Echilibrul forțelor de-a lungul planului înclinat.

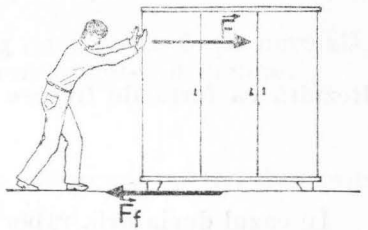


Fig. 4.21. Pentru mișcarea uniformă a dulapului este necesar ca forța de împingere să fie egală cu forța de frecare.

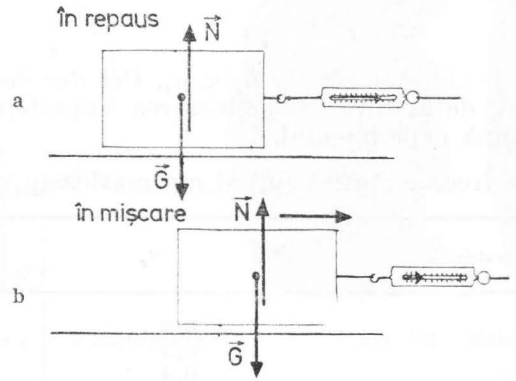


Fig. 4.22. Frecarea statică și cinematică.

Experimental se dovedește (fig. 4.22, *a*) că pînă la pornirea blocului de lemn dinamometrul arată o forță mai mare decît după, cînd blocul are o mișcare uniformă (fig. 4.22, *b*).

Există așadar o forță de frecare statică și una cinematică (de mișcare).

Experimental, se induc două legi, pentru frecare statică și cinematică între două suprafețe neunse.

1) Forța maximă de frecare statică (sau forța de frecare cinematică) nu depinde de aria suprafeței de contact.

2) Forța maximă de frecare statică (sau forța de frecare cinematică) este direct proporțională cu forța normală.

Raportul între forța maximă sub acțiunea căreia se pune în mișcare corpul aflat pînă atunci în repaus pe o suprafață neunsă și forța normală definește *coeficientul de frecare statică* μ_s

$$F_{max}/N = \mu_s. \tag{4.6}$$

Rezultă că forța de frecare statică

$$F_s \leqslant \mu_s N.$$

În cazul deplasării, raportul între forța de frecare în mișcare uniformă și rectilinie și forța normală definește *coeficientul de frecare cinematică* μ_c

$$F_f/N = \mu_c$$

din care rezultă

$$F_f = \mu_c N \tag{4.7}$$

Reiese din cele de mai sus că $\mu_c < \mu_s$. Cei doi coeficienți sînt numere și depind de natura și prelucrarea suprafețelor în contact și se determină experimental.

Coeficienți de frecare statică (μ_s) și cinematică (μ_c)

Suprafețele	μ_s	μ_c
Oțel pe oțel (uscate)	0,7	0,5
Oțel pe bronz	0,5	0,4
Oțel pe lemn (uscate)	0,4	0, 2
Oțel pe gheață	0,1	0,06
Lemn pe lemn (uscate)	0,35	0,15
Metal pe metal (unse)	0,15	0,08
Cauciuc pe îmbrăcăminte asfaltică	—	0,5
Teflon pe teflon	0,04	0,04

Observație. Valorile variază foarte mult în funcție de prelucrarea suprafețelor, u mezeală, orientarea fibrelor (la lemn), ungere etc.

În tabelul precedent sînt trecuți numai coeficienți de frecare pentru solide. Frecarea există însă și în fluide dar ecuația (4.7) nu este valabilă. Unele probleme legate de frecarea în fluide vor fi prezentate în §7.5.

Frecarea prin rostogolire. Între un corp cilindric sau sferic așezat pe o suprafață plană (fig. 4.23) există o forță de frecare la rostogolire F_r exprimată prin relația

$$F_r = \mu_r F_n$$

în care μ_r este coeficientul de frecare, iar F_n este forța normală. Întrucît întotdeauna pentru două suprafețe date în contact

$$\mu_r \ll \mu_c$$

cînd se poate se înlocuiește frecarea de alunecare cu frecarea prin rostogolire folosindu-se rulmenții (fig. 4.24).

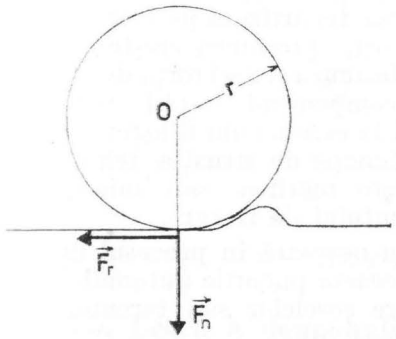


Fig. 4.23. Frecarea prin rostogolire.

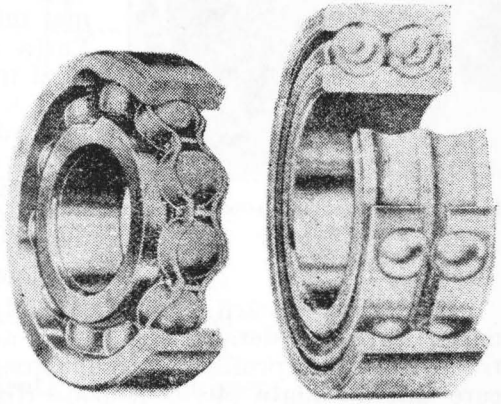


Fig. 4.24. Rulmenți.

Explicarea legilor frecării printr-o teorie unitară nu a putut fi dată pînă în prezent, dar cunoașterea microscopică a structurii mecanice a suprafețelor în contact contribuie la înțelegerea legilor enunțate. Figura (4.25) arată structura unei porțiuni din suprafața unei plăci de oțel lustruite foarte fin. Intuim astfel că la contactul a două

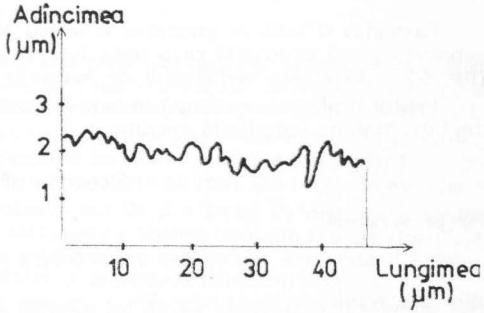


Fig. 4.25. Profil al unei suprafețe șlefuite văzut la microscop.

suprafețe neregularitățile se întrepătrund și că deplasarea corpurilor, unul în raport cu celălalt, se face prin fracturarea unor neregularități și prin ruperea unor mici „suduri" produse datorită faptului că distanțele dintre moleculele fețelor în contact scad sub valoarea la care se produc forțe de atracție. Dar cu cît forța normală este mai mare cu atît întrepătrunderea și presiunea devin mai mari și are loc o apropiere mai accentuată care determină creșterea adeziunii. Acest fapt explică creșterea forței de frecare cu forța normală. Schimbînd suprafața de contact cu una mai mică, frecarea ar trebui să scadă. Forța normală rămînînd aceeași, fiind însă repartizată pe o suprafață mai mică, presiunea crește; ca atare adeziunea și deci forța de frecare cresc compensînd astfel scăderea frecării la care ne-am fi așteptat.

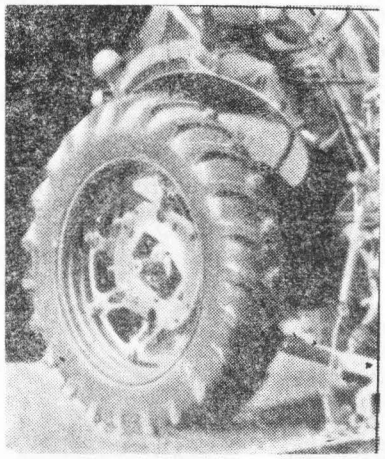


Fig. 4.26. Relieful pneurilor mărește frecarea.

În funcție de situația tehnică se urmărește mărirea sau micșorarea coeficientului de frecare.

a) Mărirea frecării este de exemplu necesară în procesul de frînare și evitare a derapărilor. Pentru aceasta pneurile automobilelor, tractoarelor au profile corespunzătoare șoselelor sau terenului pe care sînt destinate să fie utilizate (fig. 4.26).

b) Micșorarea frecării este impusă la funcționarea mecanismelor, iar soluțiile sînt diferite: ungere, utilizarea rulmenților etc.

Exemplu. O ladă cu greutatea $G = 100$ N este trasă cu o viteză constantă pe o suprafață plană orizontală cu o forță $F = 40$ N care acționează sub un unghi de 30° (fig. 4.27). Care este coeficientul de frecare?

Pentru deplasarea uniformă trebuie ca rezultanta să fie egală cu zero, adică pe orizontală, trebuie îndeplinită condiția

$$F\cos\alpha - \mu F_n = 0,$$

iar pe verticală

$$F_n + F\sin\alpha - G = 0$$

din care rezultă

$$F_n = G - F\sin\alpha,$$

pe care înlocuind-o în prima relație, se obține

$$\mu = \frac{F\cos\alpha}{G - F\sin\alpha} = \frac{40\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{N}}{100\ \text{N} - 40\frac{1}{2}\ \text{N}} = \frac{40\sqrt{3}}{80} = 0{,}43$$

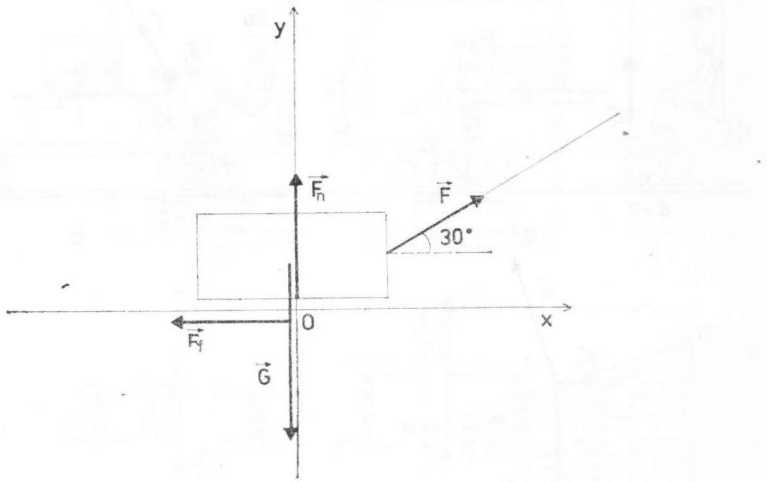


Fig. 4.27. Pentru exemplul de calcul.

4.5. Legea a doua aplicată într-un sistem neinerțial

Într-un sistem aflat în mișcare uniform accelerată în raport cu referențialele inerțiale, în afara forțelor efectiv aplicate trebuie considerate și *forțele de inerție.*

Exemple. 1. De tavanul unui vagon se află suspendat un fir cu plumb, iar pe o masă din același vagon un vas cu apă (fig. 4.28, *a*). Cînd vagonul este în repaus sau se mișcă cu viteză constantă și în linie dreaptă, firul este vertical, iar suprafața apei e orizontală. Cînd vagonul se află în mișcare uniform accelerată cu accelerație constantă $\vec{a}$, poziția firului se schimbă, iar suprafața apei își modifică înclinarea rămînînd totuși plană. Echilibrul firului se face sub acțiunea unui sistem de forțe alcătuit din forța de atracție a Pămîntului care nu s-a modificat, a tensiunii din fir și a forței $\vec{F}_i$ care apare pentru orice corp din vagon și care este o forță reală pentru observatorul din interior (fig. 4.28, *b*). În figura 4.28, *c* se arată cum este echilibrată o picătură la suprafața lichidului. Rezultanta dintre forța de inerție, greutatea și reacțiunea lichidului este nulă.

Ca atare, noua „verticală" este pe direcția lui $\vec{T}$, iar noul „plan orizontal" este perpendicular pe $\vec{T}$ (fig. 4.28, *b*).

Observație. Denivelarea lichidului față de planul orizontal, poate fi măsurată prin unghiul pe care îl face cu acest plan suprafața liberă a lichidului (fig. 4.28, *c*) și deoarece unghiul α depinde de $\vec{F}_i$ adică de accelerația sistemului rezultă că acest unghi poate măsura după calibrare accelerația, adică un astfel de dispozitiv poate constitui un *accelerometru*.

2. În intervalul de timp în care are loc pornirea sau oprirea, un ascensor are o mișcare uniform variată în care viteza lui crește de la zero la valoarea de regim, respectiv

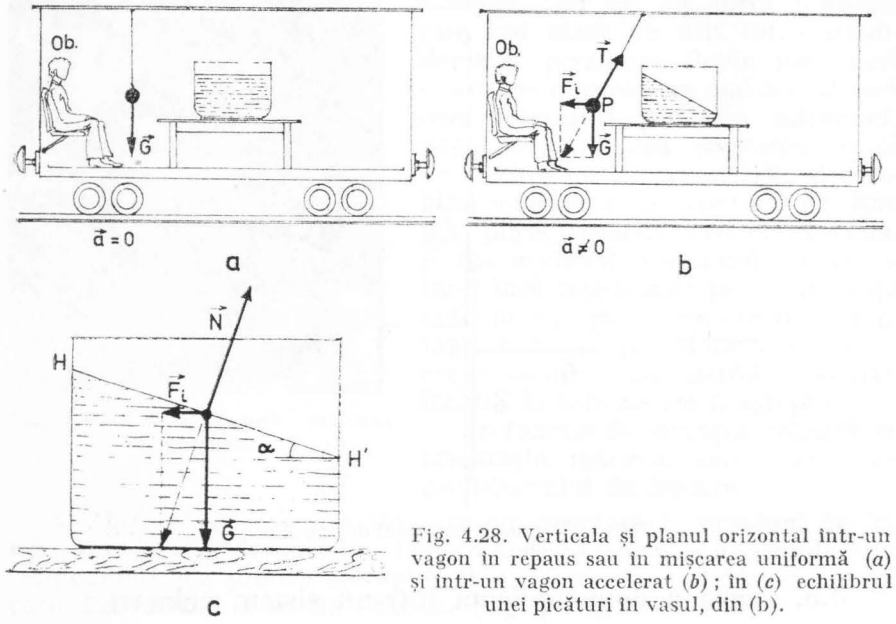


Fig. 4.28. Verticala și planul orizontal într-un vagon în repaus sau în mișcarea uniformă (*a*) și într-un vagon accelerat (*b*); în (*c*) echilibrul unei picături în vasul, din (b).

scade de la această valoare la zero. Un om care ar sta pe un cîntar cu arc așezat pe podeaua ascensorului ar constata mărirea sau scăderea greutății lui. Într-adevăr, cînd ascensorul are o mișcare variată cu accelerația $\vec{a}$ se produce echilibrul celor trei forțe : forța de inerție, greutatea persoanei și forța elastică de reacțiune a resortului cîntarului (fig. 4.29).

De altfel, existența forței de inerție „se simte" : dacă avem în mînă o sacoșă grea, aceasta ni se va părea mai grea la pornirea în sus ca apoi să pară mai ușoară la oprirea ascensorului.

Legea a doua a dinamicii (4.1) rămîne valabilă pentru un sistem neinerțial, cum sînt cele din cazurile precedente cu condiția să adăugăm forța de inerție $\vec{F}_i$. Pentru exemplificare vom scrie legea (4.1) pentru situația ilustrată în figura 4.30, în care bila B se găsește în repaus față de observatorul *Ob*. În a) :

$$F_e - F_i - G = 0$$

iar în b)

$$F_e + F_i - G = 0,$$

unde F_i este produsul între masa corpului și accelerația sistemului neinerțial.

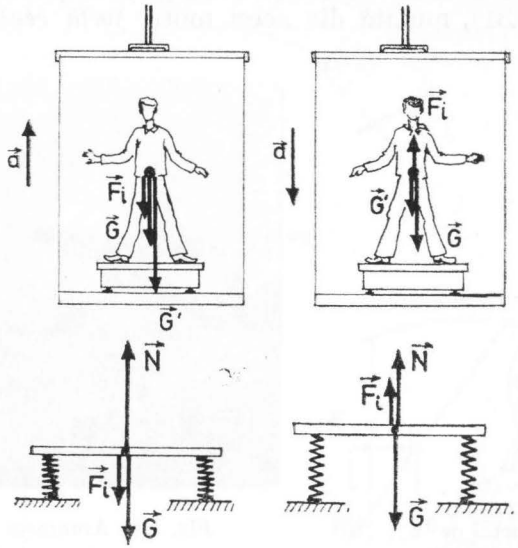


Fig. 4.29. Greutatea se modifică în intervalele de timp cînd ascensorul se deplasează uniform variat.

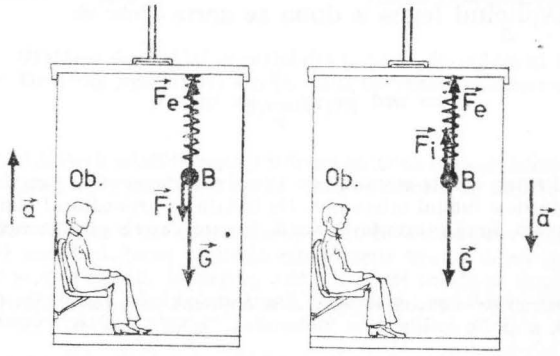


Fig. 4.30. Modificarea legii a doua a dinamicii într-un sistem neinerțial.

4.6. Dinamica mișcării circulare

Din punctul de vedere al observatorului aflat într-un punct care nu este antrenat în mișcare, pentru ca un corp să se afle în deplasare pe un cerc este necesar să existe o forță îndreptată spre centrul cercului (fig. 4.31), numită din acest motiv *forță centripetă*. Forța

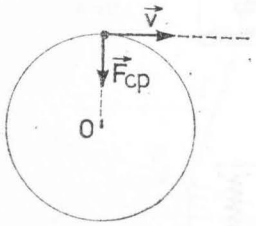


Fig. 4.31. Mișcarea punctului pe cerc din punctul de vedere al unui observator fix.

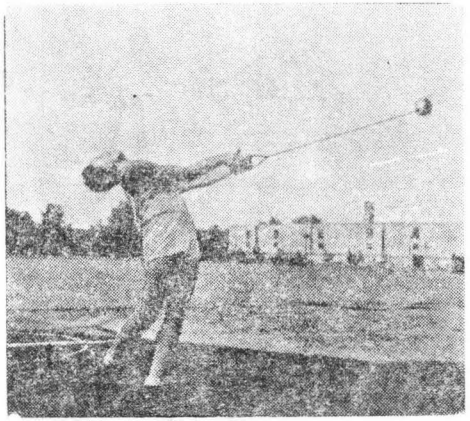


Fig. 4.32. Aruncarea ciocanului.

determină o accelerație centripetă cu aceeași orientare (vezi §3.10 relația (3.9). Aplicînd legea a doua se scrie

$$F = ma = m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2. \qquad (4.8)$$

Exemple. 1. Pentru a roti ciocanul un sportiv acționează asupra bilei cu o forță centripetă orientată de-a lungul mînerului. De îndată ce aruncătorul eliberează mînerul ciocanul se deplasează după tangenta la arcul de cerc descris pînă în acel moment (fig, 4.32).

2. Pentru a intra într-o curbă vagonul este acționat de o forță centripetă exercitată de șine (fig. 4.33, *a* și *b*).

Din punctul de vedere al unui observator care se află în vagon, acesta este un vehicul antrenat în mișcarea circulară (fig. 4.33, *c*).

Toate corpurile aflate în vehicul sînt acționate de o forță orientată spre exteriorul curbei și care se numește *forță centrifugă*. Se arată că modulul forței centrifuge este egal cu cel al forței centripete.

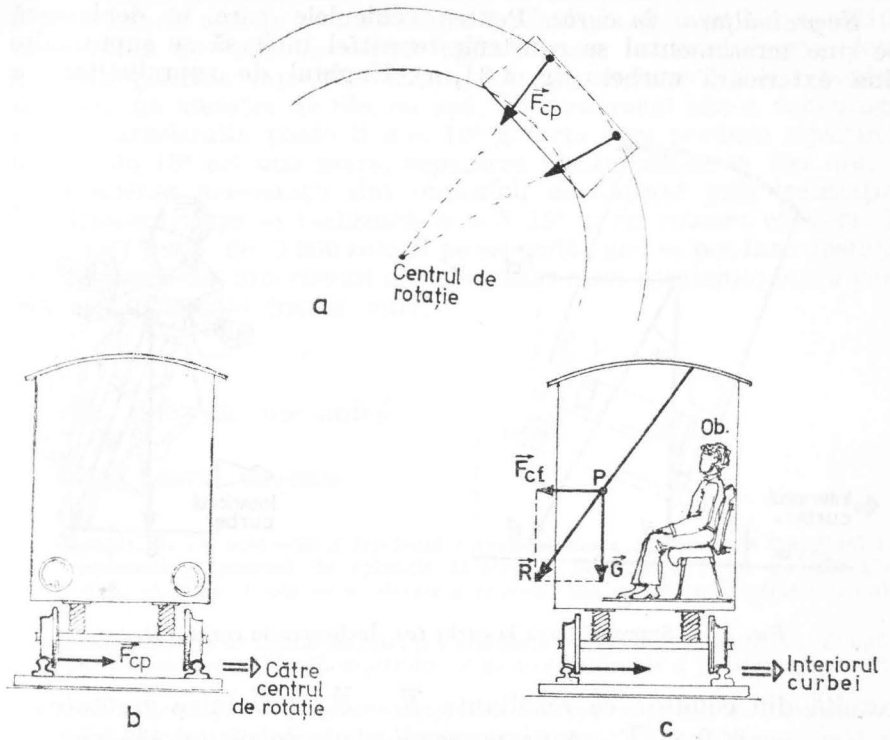


Fig. 4.33. Mișcarea vagonului în curbă din punctul de vedere al unui observator fix. Devierea pendulului din punctul de vedere al observatorului în mișcare (a).

Exemple. 1. Călătorii aflați în repaus într-un autobuz se deplasează față de un observator interior, lateral, spre exteriorul curbei cînd autobuzul se înscrie într-un viraj.

2. Poziția de echilibru a unui pendul suspendat de tavanul unui vagon care se deplasează în curbă se modifică. Noua verticală este direcția firului, adică suportul rezultantei forței centrifuge și a greutății. În vagon, atît timp cît acesta se deplasează pe un cerc astfel încît forța centrifugă rămîne constantă, suprafața unui lichid este perpendiculară pe noua „verticală". Astfel, planul „orizontal" se modifică și el.

3. Într-o navă-satelit care gravitează în jurul Pămîntului se creează *starea de imponderabilitate*, caracterizată prin faptul că forța centrifugă observată pe navă echilibrează greutatea fiecărui corp.

4.7. Aplicații tehnice ale dinamicii mișcării circulare

Supraînălțarea în curbe. Pentru vehiculele care se deplasează pe șine terasamentul se construiește astfel încît să se supraînalțe șina exterioară curbei (fig. 4.34, *a*). Unghiul de supraînălțare α

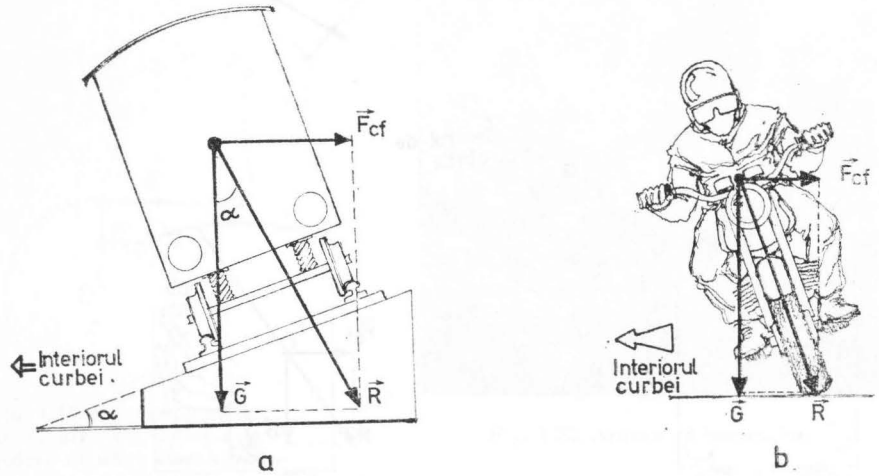


Fig. 4.34. Supraînălțarea la curbe *(a)*. Înclinarea în curbă *(b)*.

rezultă din condiția ca rezultanta $\vec{R} = \vec{F}_{cf} + \vec{G}$ între greutatea $\vec{G}$ și forța centrifugă $\vec{F}_{cf}$ să fie perpendiculară pe planul șinelor

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_{cf}}{G} = \frac{m\dfrac{v^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{rg};$$

tg α trebuie să fie cu atît mai mare cu cît viteza maximă admisă în curbă este mai mare și cu cît raza curbei este mai mică.

Calculul rămîne valabil și pentru autostrăzi, iar construcția din figură se regăsește explicînd înclinarea pe care conducătorul o dă în mod reflex vehiculelor de tipul bicicletelor, motocicletelor etc. (fig. 4.34, *b*).

Centrifugarea. Operația se face cu scopul de a grăbi filtrarea, precipitarea unor componente, uscarea zaharului sau a rufelor, degresarea laptelui etc. În acest scop, corpul supus centrifugării se rotește rapid. Datorită forțelor centrifuge rezultate componentele de densitate diferită sînt acționate în mod diferit. De exemplu, o picătură de apă ($\rho = 1\,000$ kg/m^3) aflată în repaus la suprafața unui strat de ulei ($\rho = 900$ kg/m^3) cade la fund foarte lent în cîmp gravific (aprox 1 mm/h). Ar fi necesare 200 ore pentru a separa un amestec de ulei cu apă. Punînd vasul într-o centrifugă în care accelerația poate fi $a = 10^4$ g, forța care produce separarea devine de 10^4 ori mai mare, separarea efectuîndu-se în trei ore.

Asemenea accelerații sînt imposibil de obținut prin translație. În ultracentrifuge se realizează $a = 3 \cdot 10^5$ g, cu rotoare cu raza de 2 cm și turații de 2 000 rotații pe secundă; aici se pot face operații de separarea din amestecuri a moleculelor mari (proteine) sau a particulelor coloidale foarte mici.

4.8. Energia mecanică

4.8.1. Lucrul mecanic

Exemple. 1. Un autovehicul tractează o remorcă, forța $\vec{F}_1$ constantă exercitată la cîrlig deplasîndu-și punctul de aplicație în sensul și pe direcția forței pe distanța d (fig. 4.35, *a*). Efectul este de accelerare a remorcii sau de mișcare rectilinie și uniformă.

În acest interval de timp a acționat și o altă forță $\vec{F}_2$, de frecare, punctul ei de aplicație, figurat convențional în *B*, deplasîndu-se pe aceeași direcție și pe aceeași distanță.

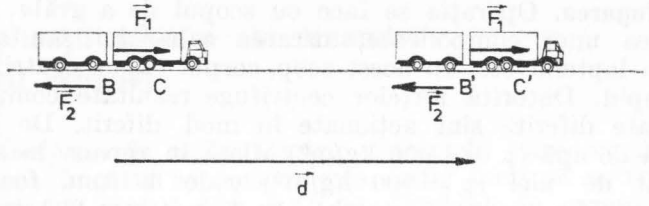
2. La trecerea printr-un canal un șlep este acționat de pe mal de o locomotivă (fig. 4.35). Șlepul a cărui direcție de deplasare este menținută în lungul canalului cu ajutorul cîrmei se mișcă sub acțiunea forței $\vec{F}_3$ constantă care face un unghi α cu axa canalului. Punctul *P* de aplicație al forței se mișcă pe distanța *d* (*PP'*). Efectul este deplasarea uniformă a șlepului. În fizică se consideră că în cele trei cazuri forțele au efectuat un *lucru mecanic*. Prin definiție lucrul mecanic *L* este produsul scalar între forța care efectuează lucrul mecanic și deplasarea punctului de aplicație.

$$L = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos\alpha \qquad (4.9)$$

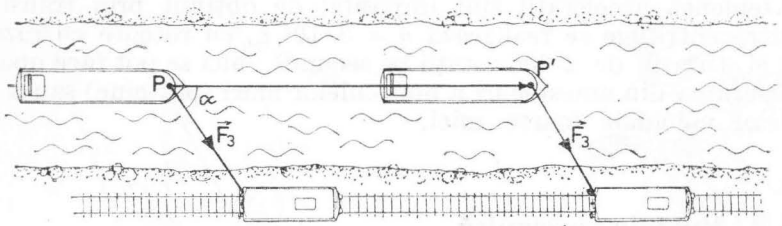
În această relație forța este un vector constant în timpul efectuării deplasării $\vec{d}$ care este considerată un vector.

În SI lucrul se măsoară în joule (J)

$$[L] = [F] \cdot [d] = \mathrm{N \cdot m} = \mathrm{J}.$$



a



b

Fig. 4.35. *a)* Prin lucrul mecanic al forței de tracțiune remorca este accelerată ; *b)* lucrul mecanic al forței care face un unghi cu deplasarea.

4.8.2. Aplicații

1°. *Lucrul mecanic al greutății.* Considerăm că un corp de masă m cade pe verticală sub acțiunea greutății de la o înălțime h. Dacă distanța nu este mare astfel încît g să poată fi considerat constant deci și greutatea $\vec{G} = m\vec{g}$, lucrul mecanic efectuat de greutate pe distanța h este conform definiției (4.9)

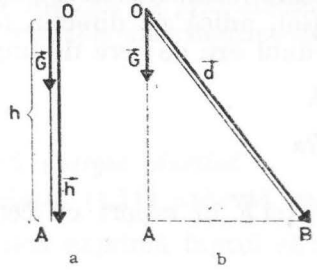
$$L = \vec{G}\vec{h} = mgh, \qquad (4.9a)$$

unghiul α între $\vec{G}$ și deplasarea $\vec{h}$, considerată ca vector (fig. 4.3, *a*,) fiind zero. Cînd corpul este lăsat să cadă fără frecare pe un plan înclinat sub unghiul α (fig. 4.36, *b*), lucrul are aceeași valoare

$$L = \vec{G}\vec{d} = Gd\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = mgd\sin\alpha = mgh.$$

2°. *Lucrul mecanic al forței de frecare.* Deplasînd corpul de masă m pe un drum orizontal (fig. 4.37) avem

$$L = \vec{F}_f \cdot \vec{d} = \mu mg\, d\cos\alpha = \mu mgd\cos\pi = -\mu mgd$$



a b

Fig. 4.36. Lucrul mecanic al greutății.

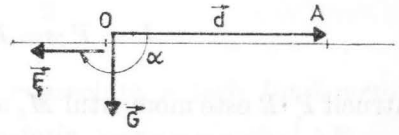


Fig. 4.37. Lucrul mecanic al forței de frecare.

3°. *Lucrul mecanic al forței elastice.* Conform relației (4.5) cînd un corp este deformat elastic el se opune cu o forță $\vec{F} = -k\vec{x}$, unde $\vec{x}$ este deformația. Pe distanța OA (fig. 4.38) forța nu este constantă

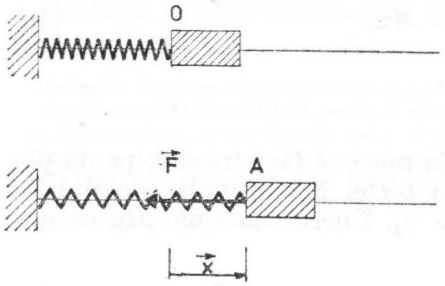


Fig. 4.38. Lucrul mecanic al forței elastice.

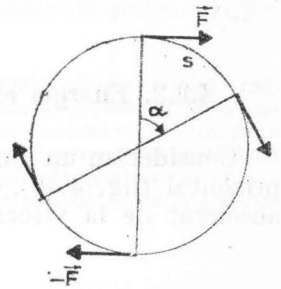


Fig. 4.39. Lucrul mecanic al unui cuplu.

și nu se poate calcula lucrul mecanic aplicînd definiția sub forma (4.9). Pentru a o folosi se poate considera că în acest interval acționează o forță medie constantă

$$\overline{F} = \frac{F_A + F_0}{2} = \frac{kx}{2}.$$

Lucrul mecanic este

$$L = \overline{F}\cdot OA = \frac{kx}{2}\cdot x = \frac{kx^2}{2}. \qquad (4.9b)$$

Întrucît forţa reală $\vec{F}$ are un sens, iar $\vec{x}$ are sens contrar, lucrul mecanic este negativ cu semnificaţia că se opune deformării resortului.

4°. *Lucrul mecanic al unui cuplu constant.* Este necesar să se însumeze lucrul mecanic efectuat de fiecare forţă. Deoarece deplasarea se face în fiecare moment tangenţial, adică pe direcţia forţei, lucrul efectuat de o forţă de-a lungul unui arc de cerc de unghi α măsurat în radiani, este (fig. 4.39)

$$L = F \cdot s = F \cdot R\alpha$$

sau, întrucît $F \cdot R$ este momentul M_0 al forţei $\vec{F}$ în raport cu centrul,

$$L = M_0\alpha.$$

Însumînd,

$$L_{tot} = 2L = 2M_0\alpha.$$

şi, deoarece $2M_0 = M$ este momentul cuplului,

$$L_{tot} = M\alpha. \qquad (4.9c)$$

4.8.3. Energia cinetică

Considerăm un mobil M aflat în mişcare fără frecare, pe un plan orizontal (fig. 4.40). Sub acţiunea forţei F constante mobilul este accelerat de la viteza v_1 la viteza v_2. Lucrul mecanic are ca efect

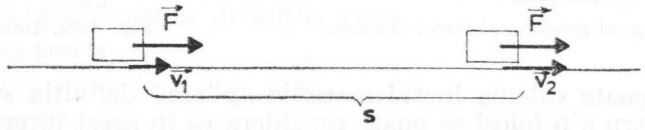


Fig. 4.40. Teorema variaţiei energiei cinetice.

schimbarea stării de mişcare. Calculînd acceleraţia a din relaţia $v_2^2 = v_1^2 + 2as$ şi înlocuind-o în legea a doua a dinamicii se obţine

$$F = ma = m\frac{v_2^2 - v_1^2}{2s}$$

sau

$$Fs = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \qquad (4.10)$$

Se observă că prin efectuarea lucrului mecanic $L = Fs$ se determină variaţia unei mărimi fizice

$$E_c = \frac{mv^2}{2} \qquad (4.11)$$

numită *energie cinetică*

Relaţia (4.11) apărută ca o consecinţă a legii fundamentale a dinamicii exprimă faptul că: *variaţia energiei cinetice* $\left(\Delta E_c = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}\right)$ *este egală cu lucrul mecanic efectuat de forţa exterioară.*

$$\boxed{\Delta E_c = L} \qquad (4.10')$$

Energia cinetică se măsoară, ca şi lucrul mecanic, în joule: $[E_c] = [L] = J$

Exemplu. Cînd un vehicul este accelerat pe un drum orizontal energia cinetică finală este mai mare decît cea iniţială, aceasta datorită lucrului mecanic efectuat de forţa motoare. Concomitent, pe aceeaşi distanţă se efectuează un lucru mecanic şi de către forţa de frecare cu efect de frînare, dar deoarece forţa motoare este mai mare viteza vehiculului creşte. Cînd cele două forţe sînt egale lucrurile mecanice sînt de asemenea egale; nu are loc o variaţie de energie cinetică, iar cînd forţa de frecare depăşeşte forţa motoare vehiculul este frînat.

4.8.4. Energia potenţială

a) *Cazul unui resort.* Pe un plan orizontal se poate deplasa fără frecare un corp legat de un resort. Considerăm că în starea iniţială resortul se află în repaus şi este nealungit. În starea finală resortul este tot în repaus, dar sub acţiunea unei forţe exterioare deformaţia a crescut la x. Conform relaţiei 4.9,*b* lucrul mecanic efectuat de forţa exterioară, opusă forţei elastice, este (fig. 4.41)

$$L = \frac{1}{2}kx^2$$

și a avut drept consecință modificarea lungimii resortului. Termenul

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 \qquad (4.11)$$

care depinde exclusiv de lungirea la un moment dat a resortu-

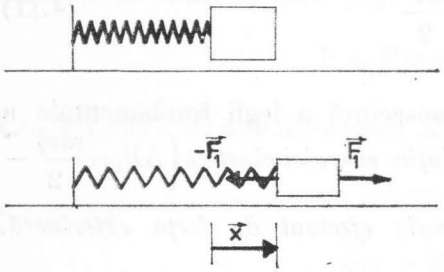


Fig. 4.41. Energia potențială a unui resort deformat.

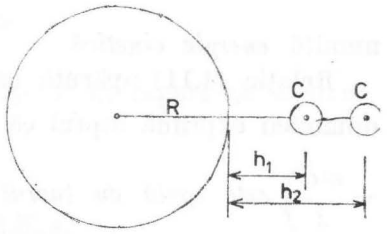


Fig. 4.42. Lucrul mecanic efectuat este egal cu variația energiei potențiale.

lui, se numește *energie potențială*.

Energia potențială depinde exclusiv de pozițiile relative ale părților arcului. Considerînd că în starea în care arcul este destins energia potențială este nulă, energia potențială depinde exclusiv de deformația x.

Relația (4.11) se poate scrie notînd cu ΔE_p variația energiei potențiale a resortului

$$\Delta E_p = L.$$

Lucrul mecanic al forței exterioare a avut în acest caz ca efect numai modificarea energiei potențiale de la starea inițială la cea finală.

b) *Cazul unui corp aflat în cîmpul gravitațional.* Corpul C de masa m aflat la o înălțime h_1 deasupra suprafeței Pămîntului (masa M) este deplasat pe verticală pînă la înălțimea h_2 efectuîndu-se lucrul mecanic L (fig. 4.42). Pentru a-l calcula, considerăm că pe drumul CC' acționează o forță constantă și egală cu greutatea corpului $G = mg$, ceea ce pentru distanța $h_2 - h_1$, nu prea mare, este o aproximație bună. Lucrul mecanic

$$L = mg(h_2 - h_1) \qquad (4.12)$$

are ca efecte modificarea poziției relative a Pămîntului și corpului C. Se spune că energia potențială a sistemului a crescut.

Considerînd energia de referință a sistemului zero cînd corpul se află la suprafața Pămîntului ($h = 0$) termenul $E_p = mgh$ este energia potențială a sistemului cînd corpul se află la înălțimea h. Relația (4.12) se scrie

$$L = E_{p_f} - E_{p_i} \qquad (4.13)$$

arătînd că lucrul mecanic efectuat este egal în acest caz cu variația energiei potențiale între starea inițială și cea finală.

4.8.5. Conservarea energiei mecanice

În exemplele următoare se poate observa transformarea reciprocă a energiei cinetice și potențiale:

Exemple. 1. Pendulul, lăsat liber în A, se deplasează către poziția O, de echilibru, și își continuă mișcarea pînă în A', unde se oprește și se întoarce (fig. 4.43). În A pendulul este în repaus ($E=0$) și față de nivelul de referință, are energie potențială maximă. Pe drumul AO energia potențială scade, iar cea cinetică este în creștere devenind maximă în O, cînd energia potențială este nulă. Pe traiectoria OA' se produce transformarea energiei cinetice care se anulează în A', unde energia potențială este din nou maximă.

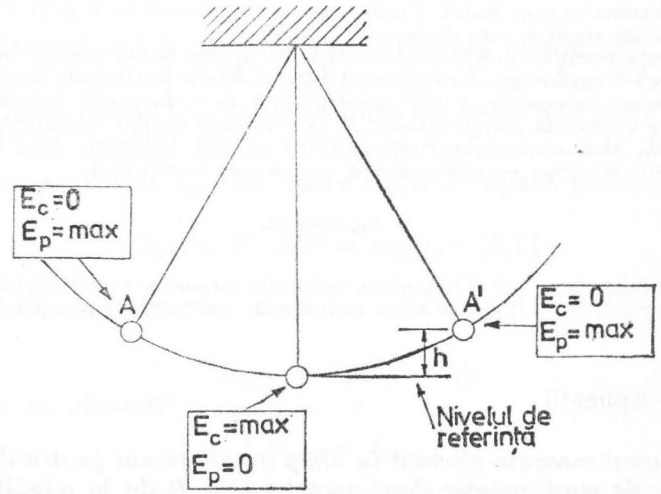


Fig. 4.43. Transformări reciproce de energie în forma potențială și cinetică la un pendul gravitațional.

2. Energia cinetică a unui corp, lansat pe verticală cu o viteză inițială, $\vec{v}$ descreşte cu cît corpul urcă (C). Energia potențială creşte devenind maximă în B cînd viteza se anulează ($E_c = 0$). Din poziția cea mai înaltă corpul se întoarce, transformarea producîndu-se în sens invers, energia potențială scade, cea cinetică se măreşte.

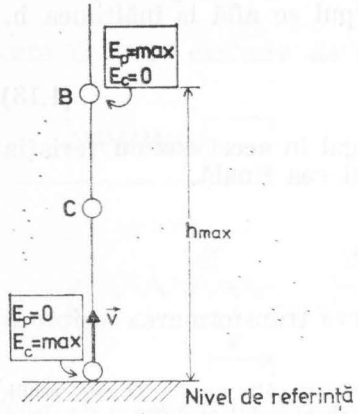


Fig. 4.44. Transformări reciproce de energie în capul unui corp lansat pe verticală în sus.

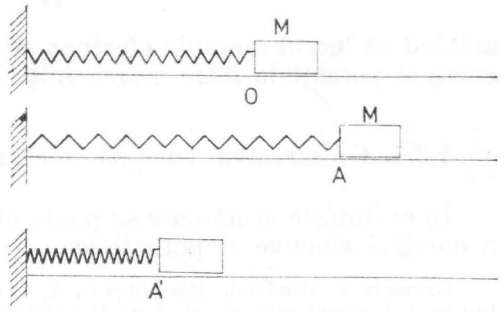


Fig. 4.45. Transformări de energie în cazul unui pendul elastic.

3. Corpul M aflat în O şi cuplat de un resort relaxat este deplasat în A întinzînd arcul. Din A corpul revine în O şi îşi continuă mişcarea pînă în A' de unde se întoarce reparcurgînd traiectoria în sens invers. Energia potențială maximă în A şi în A', se transformă în energie cinetică, care devine maximă în O.

În absența frecărilor pendulul (exemplul 1) ajunge mereu pînă la aceeaşi înălțime h, corpul C revine pe sol cu aceeaşi viteză cu care a fost lansat (ex. 2), iar M se întoarce mereu în pozițiile A şi A' simetrice față de O. În poziții intermediare oricare corp are o anumită energie cinetică E_c şi o anumită energie potențială E_p. Suma $E_c + E_p = E_m$ se numeşte *energie mecanică*.

În absența frecărilor energia mecanică a unui corp se conservă

$$E_m = \text{const.} \tag{4.14}$$

Întrucît frecările nu pot fi înlăturate, oscilațiile corpurilor din exemplele 1 şi 3 se sting, iar corpul C (ex. II) ajunge la sol cu o viteză mai mică decît cea inițială

4.8.6. Aplicații

1°. *Lucrul mecanic efectuat în cîmp gravitațional pentru deplasarea unui corp de masă m între două puncte A şi B* de la o înălțime h_1 la alta h_2 (fig. 4.46, *a*). Deplasarea se poate face pe planul AB înclinat cu unghiul α sau pe drumul AMB.

Pe drumul AB, pentru a urca corpul fără frecare, se efectuează lucrul mecanic de către forța $\vec{F}$ opusă lui $\vec{G}_t$ (4.9)

$$L = \vec{F} \cdot \vec{AB} = \text{mg} \sin \alpha \cdot AB \cdot \cos 0 = mg \sin\alpha \cdot AB;$$

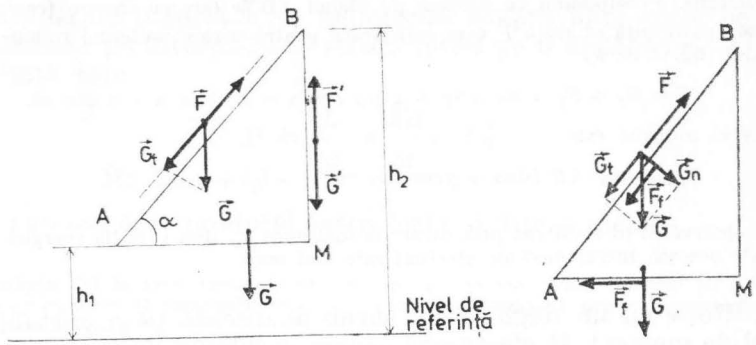


Fig. 4.46. Lucrul mecanic pe drumuri diferite : *a)* fără frecare, *b)* cu frecare.

dar $AB \sin\alpha = MB = h_2 - h_1$. Deci

$$L_{AB} = mg(h_2 - h_1)$$

Pe drumul AMB compus din porțiunea orizontală AM şi cea verticală MB se efectuează lucrul mecanic $L_{AMB} = L_{AM} + L_{MB}$. Pe AM se efectuează lucrul L_{AM} de către forța $\vec{G}$, $L = G \cdot AM \cos\beta = 0$, unde $\beta = \pi/2$ este unghiul dintre forța $\vec{G}$ şi deplasarea $\vec{AM}$, iar pe $\vec{MB}$ este efectuat lucrul L_{MB} de către forța $\vec{F}'$ opusă greutății $\vec{G}$

$$L_{MB} = F' \cdot MB = mg(h_2 - h_1).$$

Suma celor două lucruri mecanice este

$$L_{AMB} = mg(h_2 - h_1),$$

de unde se observă

$$L_{AMB} = L_{AB}.$$

Se ajunge la ideea că lucrul mecanic efectuat pe cele două drumuri între aceleaşi două puncte este acelaşi. Se demonstrează în

general că *în cîmp gravitațional lucrul mecanic efectuat nu depinde de drum*. În acest caz lucrul mecanic este egal cu diferența energiilor potențiale în B respectiv în *A*

$$L_{AB} = L_{AMB} = mgh_2 - mgh_1 = E_{P_B} - E_{P_A}$$

Observație. Presupunînd că urcarea pe planul AB se face cu frecare (coeficientul de frecare μ) rezultă că forța $\vec{F}$ care acționează pentru urcare uniformă trebuie să fie de modul (fig. 4.46, *b)*

$$F = G_f + F_f = mg \sin\alpha + \mu\, mg \cos\alpha = mg\,(\sin\alpha + \mu \cos\alpha).$$

Lucrul mecanic este

$$L_{AB} = mg \cdot AB\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = mg(h_2 - h_1) + \mu\, mg \cdot AM.$$

Se observă că în acest caz prin urcare la înălțimea h_2, deși variația energiei potențiale este aceeași, lucrul mecanic efectuat este mai mare.

2°. Rotit cu un unghi α un șurub avansează pe o distanță d. Cuplul de moment M efectuează asupra șurubului un lucru mecanic $L = M\alpha$ (relația (4.9,*c*), iar șurubul — un lucru mecanic Fd asupra mediului. Energia primită este cedată mediului, deci

$$M\alpha = Fd$$

de unde se obține valoarea forței de apăsare $F = M\alpha/d$.

4.8.7. Puterea

Mașini diferite pot efectua același lucru mecanic. De exemplu, un autoturism poate urca o pantă, motorul efectuînd un lucru mecanic. Același lucru îl poate face un alt autoturism de tip diferit, de masă aproximativ egală. Din acest punct de vedere nu apare nici o deosebire. Totuși aceeași pantă va putea fi urcată de cele două mașini în intervale de timp diferite, cel care urcă mai repede avînd un avantaj care poate fi extrem de important la o depășire.

Pentru a compara lucrurile mecanice din punctul de vedere al timpului în care sînt efectuate se introduce noțiunea de putere (P). Prin definiție, puterea medie este numeric egală cu lucrul mecanic efectuat în unitatea de timp

$$\bar{P} = \frac{L}{\Delta t}. \qquad (4.15)$$

Unitatea de putere este wattul : 1 W = 1J/1s.

O unitate întrebuințată în tehnică este calul-putere (CP) : 1 CP = 746 W, aproximativ $\frac{3}{4}$ de kilowatt.

Considerînd o forță $\vec{F}$ ce acționează asupra unui corp, pe care îl deplasează pe direcția și în sensul forței pe o distanță d, puterea dezvoltată este

$$\bar{P} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{Fd}{\Delta t} = F\bar{v} \qquad (4.16)$$

adică puterea este produsul între forță și viteza medie.

Exemplu. Să se calculeze puterea unei locomotive care trage un tren cu masa de 500 000 kg cu o viteză constantă de 40 m/s de-a lungul unei căi pentru care coeficientul de frecare este 0,02.

Forța de frecare este dată de

$$F_f = \mu G = 0{,}02 \cdot 500\,000 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 98\,000 \text{ N}.$$

Puterea se calculează din relația (4.16)

$$\bar{P} = F\bar{v} = 98\,000 \text{ N} \cdot 40 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3920 \text{ kW}.$$

Puterea este în întregime folosită pentru suplinirea pierderii de viteză datorită frecărilor.

4.8.8. Impulsul

Forța $\vec{F}$ care acționează asupra unui corp de masă m îi imprimă o mișcare uniform accelerată mărind viteza corpului de la V_0 la V în intervalul de timp Δt. Din legea a doua a dinamicii rezultă

$$F = ma = \frac{m(v - v_0)}{\Delta t}$$

și

$$F\Delta t = mv - mv_0 \qquad (4.16)$$

relație care conduce la ideea că acționînd un interval de timp Δt forța F produce o variație a mărimii $p = mv$, numită *impuls*, de la $p_0 = mv_0$ la $p = mv$.

Impulsul este o mărime vectorială, deoarece este un produs între o mărime scalară (m) și una vectorială $\vec{v}$

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Orientarea vectorului impuls este aceeași cu a vectorului viteză.

Impulsul se măsoară în $[p] = [m]\ [v] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Exemplu. O rachetă de 10^4 kg pornește din repaus fiind acționată de o forță de $2 \cdot 10^5$N timp de 20 s. Care este viteza finală a rachetei?

Scriem relația (4.16)

$$F \cdot \Delta t = mv - mv_0$$

dar $v_0 = 0$ deci

$$v = \frac{F\Delta t}{m} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 20}{10^4} = 400\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Din relația (4.16) se observă că dacă un corp este izolat din punctul de vedere mecanic* impulsul său măsurat față de un sistem inerțial se conservă ($F = 0$ implică $mv - mv_0 = 0$ sau $mv = mv_0$).

Pentru un sistem de corpuri se definește *impulsul sistemului* ca fiind suma impulsurilor tuturor corpurilor. Ca și pentru un punct, pentru un sistem de puncte este adevărată *legea conservării impulsului.*

Impulsul unui sistem de corpuri măsurat față de un sistem inerțial se conservă dacă sistemul este izolat.

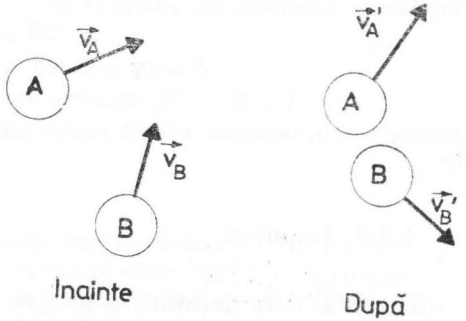


Fig. 4.47. Un sistem de corpuri înainte și după ciocnire.

Fiind dat un sistem de două corpuri, A și B de exemplu (fig. 4.47) care au impulsurile inițiale $m_A\vec{v}_A$ și $m_B\vec{v}_A$ și impulsurile finale $m_A\vec{v}'_A$ și $m_B\vec{v}'_B$ se poate scrie conform legii conservării impulsului

$$m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = m_A\vec{v}'_A + m_B\vec{v}'_B.$$

Cuvintele *inițial* și *final* se referă la *înainte* și *după* un eveniment la care participă sistemul de puncte și în care intervine modificarea impulsurilor individuale al unei părți sau al întregului sistem.

* Izolarea mecanică se traduce prin lipsa de interacțiuni mecanice între sistem și exterior.

4.8.9. Aplicații

1° *Ciocniri.* Se consideră în mod ideal două categorii de ciocniri : *plastice* și *elastice.* Desigur, nici o ciocnire reală nu se încadrează în aceste cazuri.

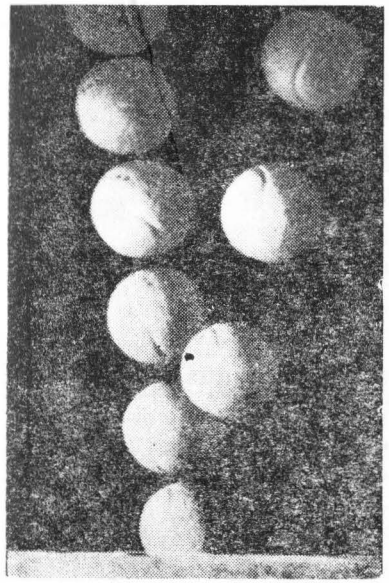


Fig. 4.48. Deformarea unei mingi de tenis în timpul ciocnirii.

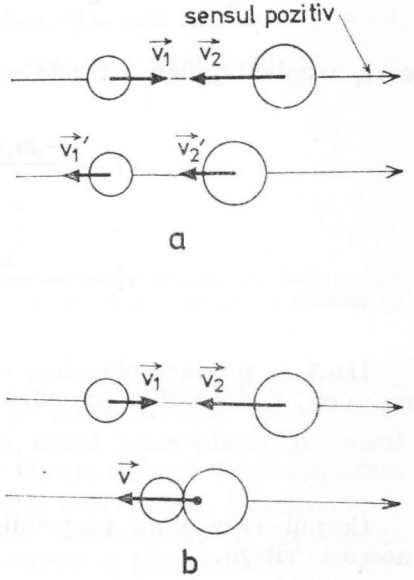


Fig. 4.49. Ciocnire unidimensională : *a)* elastică ; *b)* plastică.

În figura 4.48 este ilustrat un moment dintr-o ciocnire între o minge de tenis și un perete. Se observă deformarea mingii. În procesul oricărei ciocniri are loc transformarea reciprocă a energiei cinetice și potențiale a corpurilor care participă la ciocnire. În orice ciocnire are loc conservarea impulsului, dar nu și conservarea energiei mecanice.

O ciocnire este elastică dacă energia mecanică se conservă. Într-o ciocnire neelastică o parte din energia mecanică se transformă inversibil în căldură în procesul de deformație.

Ciocnirea elastică. Fie date două corpuri de mase m_1 și m_2 care se deplasează unul către celălalt cu vitezele $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$, se ciocnesc elastic și se deplasează în continuare cu vitezele $\vec{v}'_1$ și $\vec{v}'_2$ (fig. 4.49, *a*).

Se scriu legile conservării impulsului și energiei.

$$m_1v_1 - m_2v_2 = -m_1v_1' - m_2v_2' \tag{4.17}$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \tag{4.18}$$

care, rezolvate, dau vitezele corpurilor după ciocnire

$$v_1' = \frac{-m_1v_1 + m_2(2v_2 - v_1)}{m_1 - m_2}$$

$$v_2' = -\frac{m_2v_2 - m_1(2v_1 - v_2)}{m_1 - m_2}$$

Dacă se produce ciocnirea cu un perete în repaus ($v_2 = v_2' = 0$) $m_2 = \infty$, din relațiile precedente se obține

$$v_1' = -v_1.$$

Corpul care vine perpendicular pe un perete se întoarce cu aceeași viteză.

Ciocnire plastică. Acesta este un caz special de ciocnire neelastică. Corpurile de mase m_1 și m_2 se ciocnesc plastic cu vitezele v_1 și v_2 și pornesc împreună după ciocnire cu aceeași viteză v.

Se scrie conservarea impulsului (fig. 4.49, *b*)

$$m_1v_1 - m_2v_2 = -(m_1 + m_2)v.$$

Rezultă viteza v

$$v = \frac{m_2v_2 - m_1v_1}{m_1 + m_2} \tag{4.19}$$

Exemplu. Un autoturism cu masa $m_1 = 600$ kg avînd viteza $v_1 = 20$ m/s ciocnește în plin un autocamion de masă $m_2 = 1400$ kg care, staționează. Să se calculeze viteza cu care se mișcă împreună după ciocnire cele două vehicule avariate.

Aplicînd relația (4.19) în care $v_2 = 0$, avem conform figurii 4.49, *b*

$$v = \frac{-m_1v_1}{m_1 + m_2} = -\frac{600 \cdot 20}{2000} = -6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

semnul minus arătînd că ansamblul se va deplasa (fig. 4.49) spre dreapta.

Este interesant să se calculeze diferența dintre energia cinetică a sistemului înainte de ciocnire $E_c = 600\ \text{kg} \cdot \frac{20^2}{2}\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 12 \cdot 10^4\,\text{J}$ și după, $E_c' = 2000\ \text{kg}\,\frac{6^2}{2}\,\text{m}^2/\text{s}^2 = 36 \cdot 10^3$ J, adică $E_c - E_c' = (120 - 36)10^3$ J $= 84 \cdot 10^3$ J, diferență absorbită în cursul impactului (deformare, căldură).

Observație. Scriind relația (4.17) sub forma

$$m_1(v_1 + v_1') = m_2(v_2 - v'_2)$$

și apoi

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2 - v_2'}{v_1 + v_2'}$$

se vede că se poate, considerînd masa m_2 ca etalon, să măsurăm masa m_1 după ce s-au determinat vitezele corpurilor înainte și după ciocnire. *Acesta este un alt procedeu de măsurare al masei corespunzător proprietății inerțiale.*

2°. *Recul.* În orice armă de foc are loc aprinderea unui amestec detonant prin care proiectilul, de masă m, este lansat. Considerînd M masa armei împreună cu tubul proiectilului, impulsul total inițial este zero. (Părțile sînt în repaus.) După detonare, arma și proiectilul au vitezele $\vec{V}$ și irespectiv $\vec{v}$ în sens contrar. Întrucît acțiunea gazelor este între părțile sistemului, acesta poate fi considerat izolat. Aplicînd legea conservării impulsului și ținînd seamă de sensul vitezelor se obține

$$MV - mv = 0$$

sau

$$V = mv/M. \tag{4.20}$$

Arma pornește în sens contrar proiectilului, proces numit *recul*, cu o viteză cu atît mai mică cu cît m/M este mai mic. În scopul micșorării reculului arma se face mai masivă, iar trăgătorul strînge patul armei la umărul său făcînd împreună cu arma corp comun.

Exemplu. Ce viteză de recul are o armă de 3 kg cu care se trag cartușe de 0,060 kg cu o viteză de 200 m/s

Aplicînd relația (4.20) se obține

$$V = \frac{mv}{M} = \frac{0{,}060\ \text{kg} \cdot 200\ \text{m/s}}{3\ \text{kg}} = 4\ \text{m/s}.$$

Dacă la masa armei se adaugă aceea a trăgătorului să zicem 70 kg, viteza V devine de aproximativ 0,16 m/s!

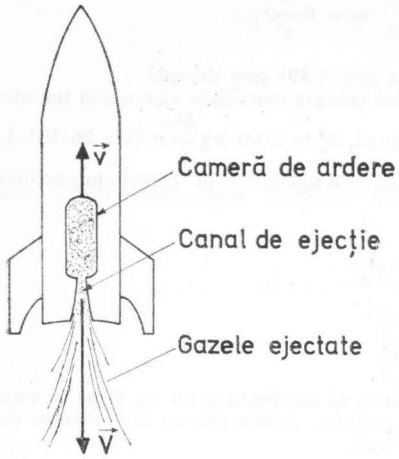


Fig. 4.50. Propulsia unei rachete.

3°. *Racheta.* Funcționarea unui motor rachetă se face prin arderea unei cantități de combustibil. Gazele rezultate din ardere exercită o mare presiune asupra camerei de ardere și datorită poziției canalului de ejecție rezultă pentru rachetă o forță de propulsie pe direcția acestui canal dar în sens opus sensului de evacuare a gazelor (fig. 4.50). Racheta funcționează și în vid.

4.8.10. Rotația solidului rigid

Un corp este alcătuit dintr-o mulțime continuă de puncte materiale aflate unele față de altele la distanțe invariabile. În mecanică se operează cu un astfel de model numit *solid rigid* care îndeplinește condiția precedentă, adică nu se deformează.

Deplasarea unui corp poate fi considerată ca fiind o succesiune de translații și rotații (fig. 4.51). Studiul mișcării de translație întreprins în capitolul 3 se face cunoscînd forțele exterioare care acționează asupra corpului considerat redus la un punct material. În acest paragraf se va studia mișcarea de rotație a unui corp solid rigid în jurul unei axe fixe.

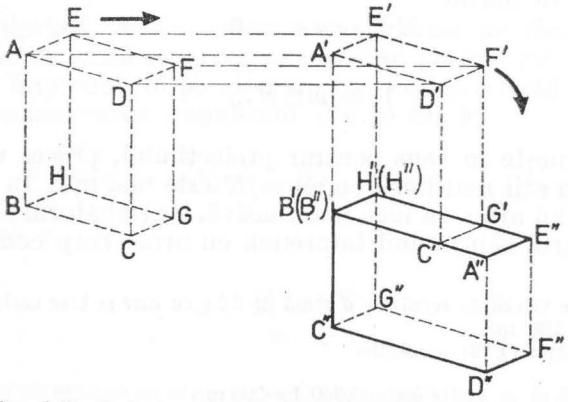


Fig. 4.51. O deplasare oarecare descompusă în translații și rotații.

Într-o mișcare de rotație traiectoria oricărui punct al corpului este un arc de cerc (fig. 4.52). Orice punct al solidului se află într-o mișcare circulară cu aceeași viteză unghiulară ω, care astfel devine o mărime caracteristică mișcării de rotație a întregului corp. Viteza unghiulară este un vector $\vec{\omega}$ orientat de-a lungul axei de rotație cu sensul dat de regula șurubului: rotindu-se șurubul în sensul de rotație a corpului sensul de înaintare este sensul vectorului $\vec{\omega}$ (fig. 4.52). Dacă $\omega = \text{const.}$ *mișcarea de rotație* este *uniformă*, iar dacă $\omega \neq \text{const.}$ *mișcarea este variată*. Un caz important este mișcarea uniform variată definită prin accelerația unghiulară ε (§ 3.12).

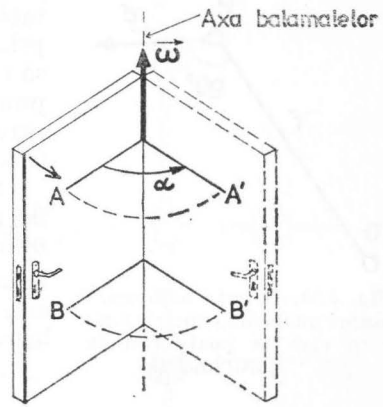


Fig. 4.52. Viteza unghiulară este un vector.

Ecuațiile (3.13–3.14), stabilite pentru cinematica punctului material în mișcarea circulară, rămîn valabile pentru mișcarea de rotație datorită faptului că mărimile care intervin ω și ε nu depind de distanța la axa de rotație și *sînt aceleași pentru orice punct al solidului rigid care se mișcă*. Pentru a le reține mai ușor se prezintă tabelul următor în care sînt scrise comparativ mărimile și relațiile mișcărilor de translație și rotație, observîndu-se analogia:

Mișcarea de translație	Mișcarea de rotație
viteza v	viteza unghiulară ω
accelerația a	accelerația unghiulară ε
mișcarea uniformă $s = s_0 + vt$	mișcarea uniformă $\alpha = \alpha_0 + \omega t$
mișcarea uniform variată	mișcarea uniform variată
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
$s = s_0 + v_0 t + 1/2\ at^2$	$\alpha = \alpha_0 + \omega_0 t + 1/2\ \varepsilon t^2$

4.8.11. Inerția în mișcarea de rotație

Așa cum un corp în mișcare de translație manifestă proprietăți inerțiale, tot astfel un corp în mișcare de rotație are tendința de a-și păstra starea de mișcare în care se află la un moment dat.

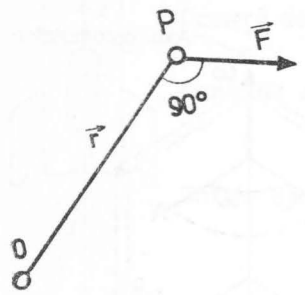


Fig. 4.53. O forță acționează asupra unuia din punctele unui corp care se poate roti în jurul unei axe.

În translație, un corp este accelerat dacă asupra lui acționează o forță. În rotație, modificarea vitezei unghiulare se face prin acțiunea unui moment. Ne așteptăm să existe o lege similară între mărimi corespunzătoare masei, accelerației și forței care intervin în legea a doua a dinamicii ($F = ma$).

Să considerăm un punct material P de masa m care se poate roti în jurul unui punct O (fig. 4.53). Punctul este acționat de o forță $\vec{F}$ care îi imprimă o accelerație tangențială ($a = r\varepsilon$). Aplicînd legea a doua se obține

$$F = mr\varepsilon$$

și înmulțind cu brațul forței r,

$$rF = mr^2\varepsilon,$$

Se observă că expresiei rF este momentul forței $\vec{F}$ în raport cu O. Să comparăm această relație cu legea fundamentală din care derivă, punînd în evidență mărimile corespondente

$$\begin{array}{ccccc} F & = & m & & a \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ rF & = & mr^2 & & \varepsilon. \end{array} \qquad (4.21)$$

Mărimea mr^2 are pentru rotație rolul pe care masa îl deține în mișcarea de translație.

Trecînd la un sistem de puncte materiale care alcătuiesc corpul în rotație relația precedentă se transformă deoarece trebuie aplicată tuturor punctelor și se efectuează o sumă. În partea întîi suma tuturor momentelor dă momentul rezultant. În partea a doua accelerația unghiulară este aceeași pentru toate punctele și iese factor comun pe lîngă o sumă de forma

$$m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots + m_nr_n^2 = I \qquad (4.22)$$

care se numește *moment de inerție* al corpului.

Relația (4.21) se poate scrie după însemnare sub forma:

$$\underset{\substack{\text{Momentul rezultant al forțelor care acționează}}}{M} = \underset{\substack{\text{Momentul de inerție al corpului}}}{I} \cdot \underset{\substack{\text{Accelerația unghiulară}}}{\varepsilon} \qquad (4.23)$$

care este *legea a doua a dinamicii pentru mișcarea de rotație: accelerația unghiulară este direct proporțională cu momentul rezultant și invers proporțională cu momentul de inerție.*

4.8.12. Momentul de inerție

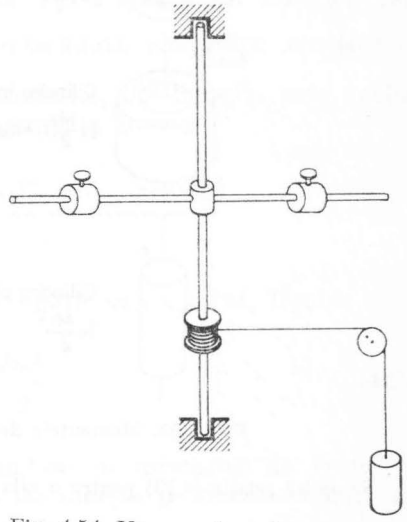


Fig. 4.54. Un aparat pentru înțelegerea momentului de inerție.

Această mărime depinde de felul cum este distribuită masa corpului față de axa de rotație. Cu dispozitivul desenat în figura 4.54 se poate înțelege semnificația momentului de inerție. Cilindrii de mase egale sînt fixați simetric la o distanță oarecare. Ei se rotesc împreună cu axul, fiind antrenați prin aplicarea unui moment constant. Se măsoară ε cronometrînd timpul de cădere al corpului* pe distanța h. Se constată că accelerația unghiulară variază în funcție de distanța cilindrilor la axa de rotație.

În figura 4.55 sînt date momentele de inerție pentru cîteva corpuri.

Unitatea de măsură pentru momentul de inerție rezultă din relația (4.23)

$$[I] = \frac{[M]}{[\varepsilon]} = \frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m}}{\text{rad/s}^2} = \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

* $h = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} r\varepsilon t^2$

Exemplu. Pentru pornirea unui motor de barcă se folosește un fir gros care este înfășurat pe o fulie care are $I = 0{,}05\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ și diametrul de 20 cm, neglijînd frecările și momentul rezistent dat de compresia motorului să se calculeze viteza unghiulară la sfîrșitul unei jumătăți de tură dacă la capătul sforii de pornire acționează o forță de 100N

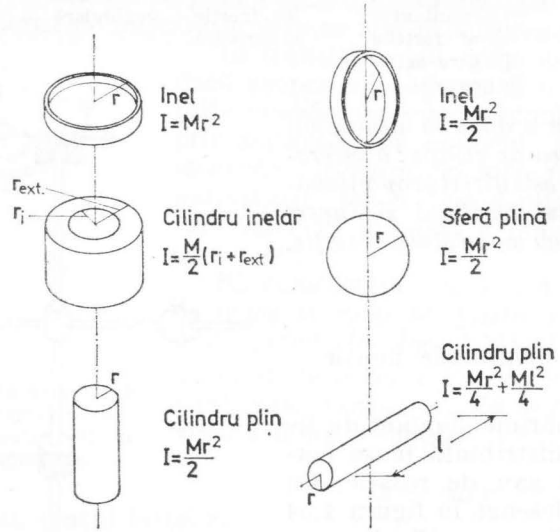


Fig. 4.55. Momentele de inerție ale cîtorva corpuri.

Se aplică relația (4.23) pentru a afla accelerația unghiulară

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{100\ N \cdot 0{,}1\ \text{m}}{0{,}05\ \text{kg}\cdot\text{m}^2} = 200\ \text{rad/s}^2.$$

Ca urmare, viteza unghiulară crește de la $\omega_0 = 0$ la ω

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t = \varepsilon t.$$

Pentru a-l calcula pe t se folosește relația

$$\alpha = \alpha_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$$

unde

$$\alpha_0 = 0,\ \omega_0 = 0,\ \text{deci}\ \alpha = \frac{1}{2}\varepsilon t^2$$

din care rezultă

$$t = \sqrt{\frac{2\alpha}{\varepsilon}}.$$

Înlocuind expresia lui t în relația lui ω avem

$$\omega = \varepsilon\sqrt{\frac{2\alpha}{\varepsilon}} = \sqrt{2\,\alpha\varepsilon} = \sqrt{2\cdot\pi\cdot 200} = 35{,}4\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

4.8.13. Energia cinetică a unui corp în mișcare de rotație

Fiecare punct de masă m_A, component al corpului, se mișcă pe un cerc cu o viteză tangențială $\vec{v}_A$. Energia lui cinetică este $\frac{m_A v_A^2}{2} = \frac{m_A r_A^2\,\omega^2}{2}$. Energia corpului este suma energiilor cinetice ale tuturor punctelor. Cînd se face însumarea, deoarece ω este același pentru toate punctele, energie cinetică ia forma

$$E_c = \frac{\omega^2}{2}\underbrace{(m_A r_A^2 + m_B r_B^2 + \ldots + m_N r_N^2)}_{I}$$

în care paranteza este *momentul de inerție al corpului*. Deci

$$E_c = \frac{I\omega^2}{2} \qquad (4.24)$$

expresie asemănătoare energiei cinetice în mișcarea de translație cu corespondența: masă↔moment de inerție și viteză↔viteză unghiulară.

Volantul. Din relația (4.24), se observă că energia cinetică a unui corp depinde, pentru o anumită viteză unghiulară, de momentul de inerție. Un corp în mișcare de rotație are deci pentru o viteză unghiulară dată și o masă dată o energie cinetică cu atît mai mare cu cît momentul lui de inerție este mai mare. În cazul motorului cu ardere internă în patru timpi, de exemplu, întrucît numai unul este motor, lucrul mecanic efectuat în timpul detentei determină creșterea energiei cinetice a *volantului*, disc cu moment de inerție mare montat pe arborele motor. O parte din energia transferată volantului este parțial recedată pentru admisia, comprimarea și evacuarea amestecului carburant și a gazelor arse (v. p. 287)

Energia cinetică a corpului variază prin efectuarea lucrului mecanic de către forțele exterioare care dau un moment în raport cu axa de rotație. În acest fel viteza unghiulară variază de la o

valoare ω_1 la alta ω_2. Astfel, în exemplul precedent lucrul mecanic efectuat de forța de 100 N determină modificarea turației motorului bărcii de la zero la 35,4 rad/s.

Există, prin analogie cu teorema variației energiei cinetice (4.10), o relație asemănătoare.

$$L = \frac{1}{2} I\omega_2^2 - \frac{1}{2} I\omega_1^2 . \qquad (4.25)$$

Variația energiei cinetice a corpului este egală cu lucrul mecanic efectuat.

4.8.14. Momentul cinetic

1°. *Momentul cinetic al unui punct material în raport cu un punct.* În mișcarea de rotație fiecare particulă componentă a corpului are în mișcarea circulară un impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ (fig. 4.56). Impulsul variază în orice moment în direcție și modul, dacă mișcarea de rotație este neuniformă, sau numai în direcție dacă $\omega = \text{const}$. Considerăm acest al doilea caz.

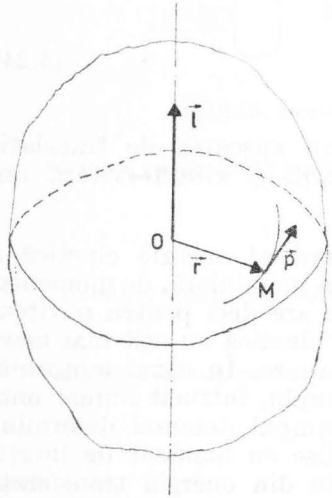


Fig. 4.56. Momentul cinetic al unui punct.

Prin definiție

$$\vec{r} \times m\vec{v} = \vec{l} \qquad (4.26)$$

$\vec{l}$ este un vector numit *momentul cinetic* al punctului $\vec{M}$ în raport cu O.

Vectorul moment cinetic este perpendicular pe planul lui $\vec{r}$ și $\vec{p}$ în punctul O (fig. 4.56). Momentul cinetic se măsoară în SI în

$$[l] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} .$$

2°. *Momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale în mișcarea de rotație.* Momentul cinetic al unui punct A este un vector cu suportul pe axa de rotație. Momentul cinetic al tuturor punctelor corpului se va obține prin însumarea momentelor cinetice ale fiecărui punct în parte și va fi deci un vector $\vec{L}$ situat de

asemenea pe axa de rotație, de modul egal cu suma modulelor

$$L = r_A^2 m_A\omega + r_B^2 m_B\omega + \ldots + r_N^2 m_N\omega = \omega(r_A^2 m_A + r_B^2 m_B + \ldots + r_n^2 m_N)$$

unde s-a scos factor ω, același pentru toate punctele. Dar suma din paranteză constituie momentul de inerție al corpului. Notîndu-l cu I, se obține

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \qquad (4.27)$$

Întrucît $\vec{\omega}$ este un vector (v. § 4.8.10) urmează că momentul cinetic este un vector colinear cu $\vec{\omega}$.

În cazul mișcării de translație starea de mișcare este descrisă de impulsul punctului sau corpului. În absența interacțiunii impulsul se conservă.

În mod analog se dovedește că *în aceleași condiții de izolare mecanică momentul cinetic al unui corp se conservă.* Deoarece momentul cinetic este un vector, conservarea momentului cinetic implică constanța atît în modul cît și în direcție.

Exemple. 1. Cînd un patinator execută o piruetă, întinderea mîinilor lateral sau aducerea lor lîngă corp determină creșterea sau scăderea momentului lui de inerție, iar viteza unghiulară se micșorează, respectiv se mărește în mod corespunzător pentru ca L să fie constant [relația (4.27)].

2. Modificarea direcției momentului cinetic conduce la *efectul giroscopic.*

Să presupunem că discul din figura 4.57 este rotit de cuplul $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$. Acest cuplu are un moment $\vec{M}$ și conform relației (4.23) determină o accelerație unghiulară $\vec{\varepsilon}$ colineară cu $\vec{M}$.

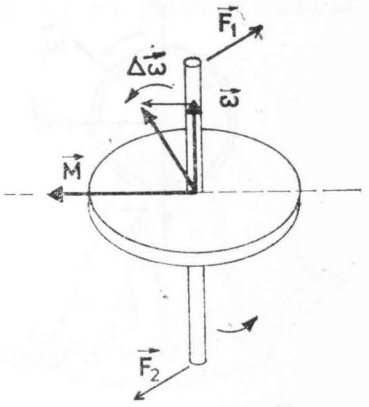


Fig. 4.57. Efecttul giroscopic.

Însă $\vec{\varepsilon} = \dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$

adică $\Delta\vec{\omega}$ este colinear cu $\vec{M}$. Aceasta înseamnă că sub acțiuneacuplului $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ axa va fi rotită în sensul arătat în figură.

Această mișcare se numește de *precesie*. Să exemplificăm modul cum apare efectul giroscopic în cazul simplu al unei biciclete (fig. 4.58, *a*). Presupunem că dintr-un motiv oarecare la un moment dat bicicleta, care se deplasează cu viteza $\vec{v}$ în sensul arătat, se înclină lateral. Această mișcare este o rotație în jurul axei xx'. Asupra roților, aflate față de cadrul bicicletei într-o rotație cu viteza unghiulară $\omega_1 = v/r$ acționează cîte un

moment $\vec{M}$ (fig. 4.58, b). Ca urmare, apare, de exemplu asupra roții din față un cuplu giroscopic $\vec{M}g_1$ care are ca efect precesia ei în jurul axei yy'. (Un cuplu asemănător acționează și asupra roții din spate.) Ghidonul se rotește, bicicleta înscriindu-se într-o curbă. La această nouă mișcare de rotație (precesia în jurul axei yy') apare un nou cuplu giroscopic $\vec{M}g_2$ (fig. 4.58, c) cu *efectul de redresare* spre poziția verticală deoarece, așa cum observăm comparînd figurile 4.58, b, c, $\vec{M}$ și $\vec{M}g_2$ au aceeași direcție dar sînt de sens contrar.

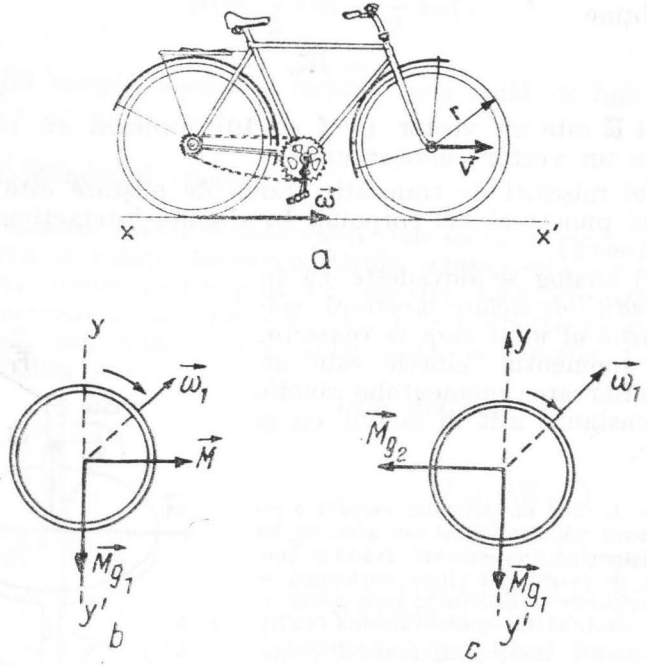


Fig. 4.58. Apariția efectului giroscopic la o bicicletă.

Tendința de menținere a poziției axei corpurilor aflate în mișcare de rotație este folosită pentru stabilizarea mișcărilor navelor maritime, avioanelor, rachetelor etc.

5

OSCILAȚII ȘI UNDE

5.1. Oscilații mecanice

În figura 5.1 sînt prezentate trei corpuri care efectuează mișcări diferite. Spre deosebire de bilă care după lansare ocupă succesiv noi poziții, mereu altele (A, B, C,...), (fig. 5.1, a), piatra și scaunul

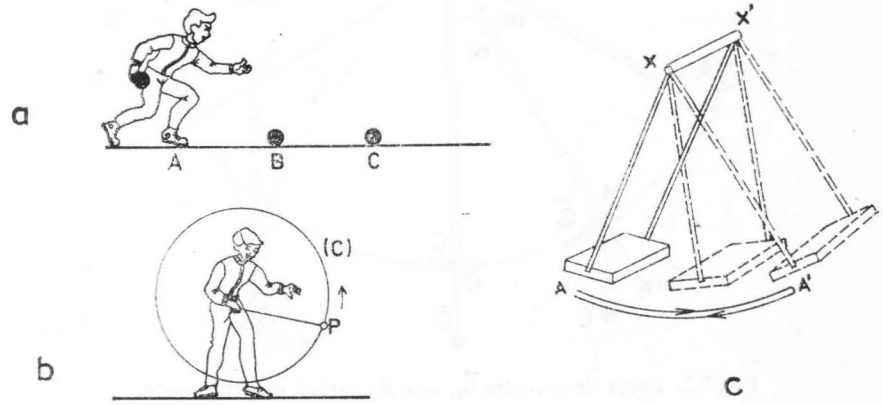


Fig. 5.1. Bila e lansată pe planul orizontal *(a)*, piatra legată cu un fir este rotită *(b)*, iar leagănul împins este lăsat apoi liber *(c)*.

leagănului parcurg de mai multe ori o anumită traiectorie, cercul C, respectiv arcul de cerc AA' (fig. 5.1, b, respectiv c). Observăm, însă, că în timp ce piatra (P) parcurge cercul în același sens, scaunul leagănului se deplasează pe arcul AA' atît într-un sens, cît și în

celălalt. Mișcarea leagănului se numește *oscilație** mecanică, iar corpul care execută oscilații este numit *oscilator* (mecanic).

Oscilațiile constituie un tip de mișcare aparte cu o importanță deosebită în fizică, deoarece foarte multe sisteme au proprietatea de a efectua oscilații.

5.1.1. Analiza mișcării unui oscilator

Să studiem cu atenție mișcarea unui oscilator.

a) Alegem mai întîi pentru exemplificare leagănul din figura 5.1, *c*.

În repaus, leagănul ocupă poziția verticală XO în care greutatea G a leagănului, care se aplică în centrul de greutate, presupus a fi în C, nu dă moment de rotație față de axa de rotație care trece prin X și este perpendiculară pe planul hîrtiei (fig. 5.2). În această

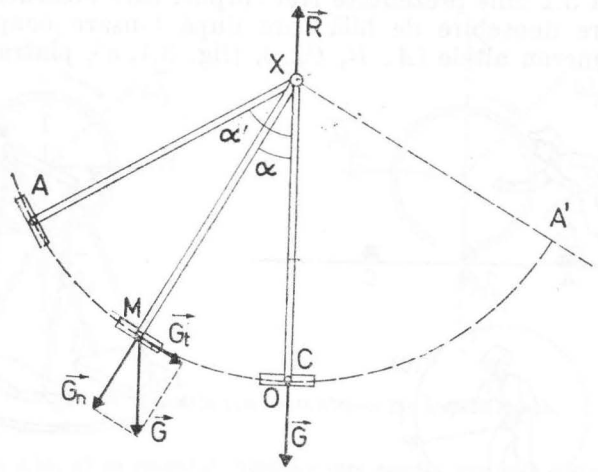


Fig. 5.2. Forța de revenire $\vec{G}_t$, este de natură gravitațională.

poziție greutatea G și reacțiunea din lagăr R își fac echilibru; poziția OX se numește *poziție de echilibru*.

Leagănul nu părăsește de la sine poziția de echilibru. Din acest motiv este necesar cu un sistem exterior să-i cedeze energie pentru

* Termenul de oscilație provine din limba latină. Cuvîntul latinesc *oscillare* denumește tocmai procesul de balansare, a oscila, a mișca încolo și încoace.

a-l duce din repaus într-o poziție laterală, de exemplu în A *(proces de excitare)*. Lăsat liber în A, leagănul este pus în mișcare de componenta tangențială $\vec{G}_t$ a greutății $\vec{G}$ care determină revenirea lui către O. În intervalul de timp în care scaunul parcurge arcul AO energia potențială primită în procesul de excitare se transformă treptat în energie cinetică. Oscilatorul continuă să se miște către A' depășind punctul O datorită inerției. Pînă în A', unde oscilatorul se oprește, energia lui cinetică se transformă în energie potențială. Componenta G_t, care pe arcul AC a accelerat scaunul, îl frînează pe arcul OA' fiind mereu îndreptată către poziția de echilibru. Această forță are deci permanent tendința de a reduce oscilatorul în poziția de echilibru, motiv pentru care se numește *forță de revenire*. Astfel, oscilatorul revine din A' către O și apoi își continuă drumul spre A. Transformarea reciprocă a energiei din formă potențială în formă cinetică pe drumul $A'O$ și apoi din O spre A continuă. Leagănul efectuează oscilații libere sub acțiunea unei forțe de revenire de natură gravitațională*.

b) În figura 5.3, *a* este desenat ciocănelul unei sonerii electrice. Lama de oțel a ciocănelului este prinsă rigid într-un lăcaș L. Scos

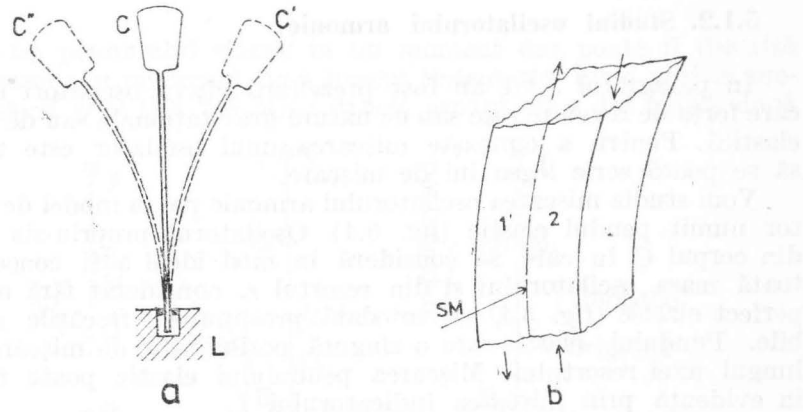


Fig. 5.3. Forța de revenire este de natură elastică.

din poziția de echilibru C și dus într-o altă poziție C', ciocănelul execută oscilații între C' și C'' unde lama se întoarce. Să analizăm care este natura forței de revenire.

* De fapt sistemul care este excitat se compune din leagăn și Pămînt. Pentru simplificarea limbajului se vorbește numai de oscilația leagănului.

Mai întîi se vede că forța de revenire nu este gravitațională. Cînd lama se încovoaie spre poziția C' jumătatea (*1*) din stînga (fig. 5.3, *b*) este supusă întinderii, iar cea din dreapta (*2*) este comprimată și, ca urmare, (*1*) este alungită, iar (*2*) este comprimată. Dacă forțele nu sînt mari, alungirile și comprimările rămîn în limitele deformărilor elastice. Astfel, forțele care iau naștere se opun acestor deformări, avînd tendința de a readuce lama la forma inițială pe care ea a avut-o în poziția de echilibru. Forțele încetează să acționeze cînd deformările se anulează, adică tocmai în poziția LC. Forțele de revenire, în cazul acestui oscilator, sînt de natură elastică.

Transformările energetice sînt următoarele: sistemul excitator cedează energic lamei prin efectuarea unui lucru mecanic de deformare. În C' sau C'' energia mecanică a lamei este exclusiv potențială. Sub acțiunea forțelor de revenire lama este readusă spre C unde deformația se anulează. Aici energia mecanică este exclusiv sub formă cinetică, lama continuînd să se miște în același sens datorită inerției. În continuare forțele de revenire frînează mișcarea pînă la oprirea ei în C'' sau C'.

Datorită frecărilor, oscilațiile leagănului și ale lamei se amortizează, după un timp oscilatorul oprindu-se în poziția de echilibru.

5.1.2. Studiul oscilatorului armonic

În paragraful 5.1.1 au fost prezentați cîțiva oscilatori reali la care forța de revenire este sau de natură gravitațională sau de natură elastică. Pentru a cunoaște mișcarea unui oscilator este necesar să se poată scrie legea lui de mișcare.

Vom studia mișcarea oscilatorului armonic pe un model de oscilator numit pendul elastic (fig. 5.4). Oscilatorul propriu-zis constă din corpul C în care se consideră în mod ideal a fi concentrată toată masa oscilatorului și din resortul r, considerat fără masă și perfect elastic (fig. 5.4, *a*); totodată presupunem frecările neglijabile. Pendulul elastic are o singură posibilitate de mișcare, de-a lungul axei resortului. Mișcarea pendulului elastic poate fi pusă în evidență prin mișcarea indicatorului I.

În repaus pendulul ocupă o poziție O. În O forța $\vec{G}$, greutatea corpului C și forța elastică $\vec{R}$ din resort își fac echilibru (fig. 5.4,*a*) Pendulul nu părăsește această poziție fără intervenție din afară, motiv pentru care O se numește *poziția de echilibru* (stabil). Scoțîndu-l din poziția de echilibru pînă în B_2, și lăsîndu-l liber pendulul revine către O, trece prin poziția de echilibru și se mișcă mai departe pînă într-o poziție B_1 simetrică față de B_2 în raport cu O. (fig. 5.4, b). În B_1 pendulul se oprește și se întoarce către B_2 parcurgînd traiectoria în condiții pe care le considerăm ideale, adică neglijăm frecările. Pendulul efectuează oscilații neamortizate.

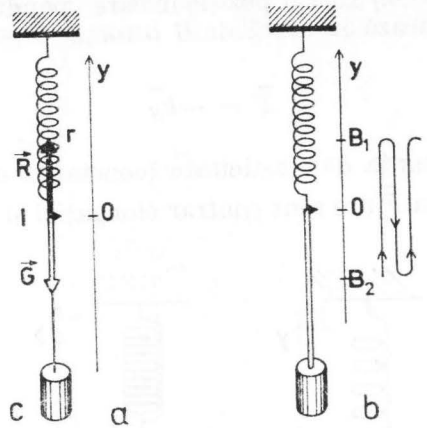


Fig. 5.4. Pendulul elastic.

Poziția pendulului elastic la un moment dat poate fi descrisă prin distanța y măsurată de-a lungul traiectoriei între poziția momentană M și O (fig. 5.5, *a*). Întrucît pentru un y dat există două

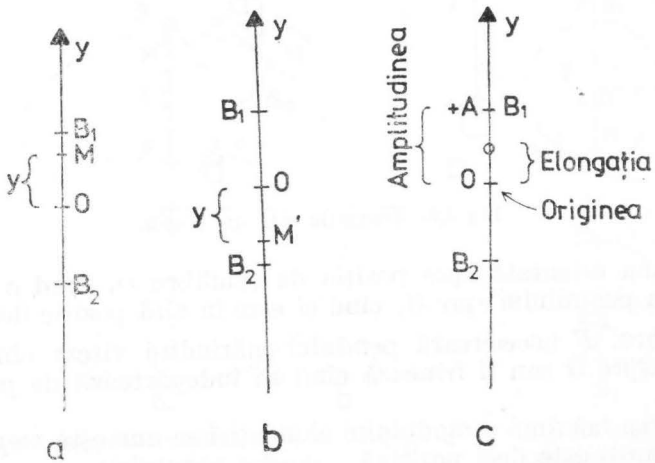


Fig. 5.5. Descrierea mișcării unui oscilator armonic.

poziții M și M' simetrice față de O (fig. 5.5, *a* și *b*) distanța $OM = y$ trebuie să se ia cu semn. Alegînd Oy ca axă, y este coordonata punctului M și se numește elongație. Elongația variază în timp. Elongația are o direcție, un modul și un sens, deci toate atributele unui vector (fig. 5.6.) Într-o poziție în care pendulul are elongația y în resort acționează în afară de G o forță

$$\vec{F} = -k\vec{y} \tag{5.1}$$

unde k este constanta de elasticitate (constanta elastică) a resortului (fig. 5.6). Forța $\vec{F}$ are sens contrar elongației și este, prin urmare,

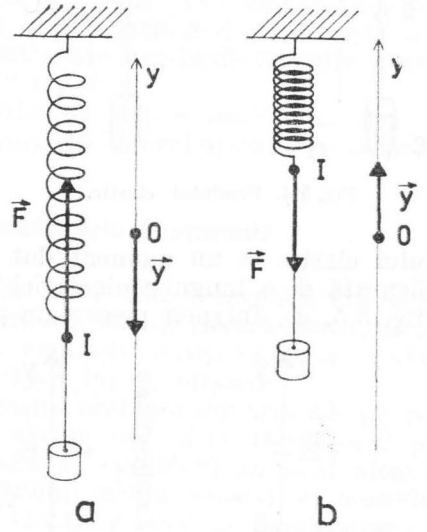


Fig. 5.6. Elongația este un vector.

întotdeauna orientată spre poziția de echilibru O, fiind o forță de revenire a pendulului spre O, cînd el este în altă poziție decît aceea de echilibru. $\vec{F}$ accelerează pendulul mărindu-i viteza cînd acesta se mișcă spre O sau îl frînează cînd se îndepărtează de poziția de echilibru.

Valoarea maximă a modulului elongației se numește *amplitudine*. Amplitudinea este deci pozitivă.

În figura 5.5, *c* amplitudinea este $A = OB_1 = OB_2$

Pentru studiul mișcării oscilatorului armonic ne folosim de mișcarea circulară uniformă.

Urmărim concomitent mișcarea uniformă pe un cerc a punctului M și mișcarea proiecției M'' a lui M pe axa Oy (fig. 5.7, *a*). În timp ce M face o rotație completă pornind din C_1 în sensul arătat, M'' efectuează o oscilație pornind din O, așa cum arată figura 5.8,

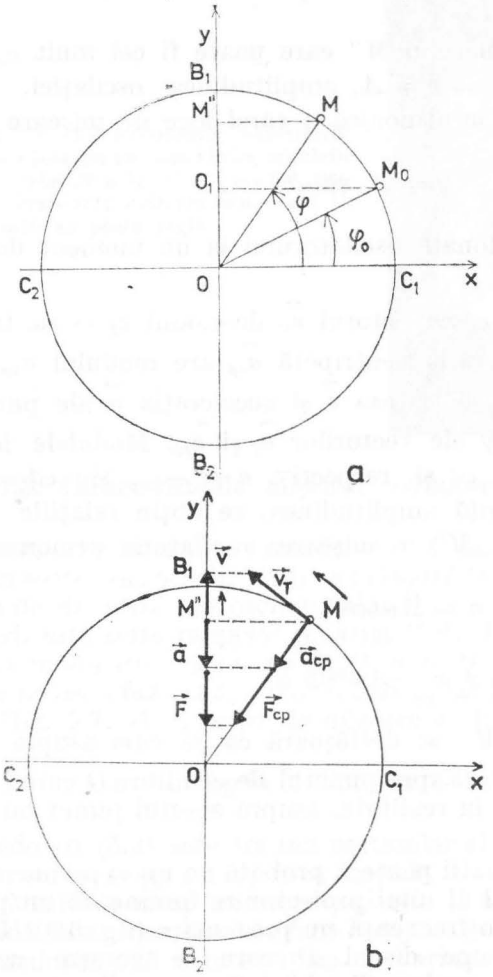


Fig. 5.7. Pentru stabilirea legii de mișcare a oscilatorului armonic.

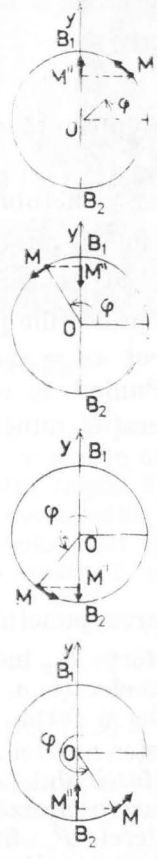


Fig. 5.8. Mișcarea concomitentă a punctului M și a proiecției lui M''.

Poziția lui M la momentul t este dată de mărimea unghiului la centru φ făcut de semiaxa Ox cu raza în M. Dacă ω este viteza unghiulară (constantă) a punctului M care la momentul inițial a fost în C_1, poziția lui M'' este dată de

$$OM'' = y = r \sin\varphi = r \sin \omega t.$$

OM'' este elongația punctului M'' care poate fi cel mult egală cu raza. Notăm max $|y| = r = A$, amplitudinea oscilației. Astfel, M'' efectuează o oscilație armonică a cărei lege de mișcare este

$$y = A \sin\omega t. \tag{5.2}$$

y reprezintă coordonata oscilatorului la un moment dat t pe axa Oy.

Viteza punctului M este vectorul $\vec{v}_T$ de modul $v_T = r\omega$ tangent la cerc în M, iar accelerația centripetă $\vec{a}_{cp}$ are modulul $a_{cp} = r\omega^2$ (fig. 5.7, *b*). În consecință, viteza $\vec{v}$ și accelerația $\vec{a}$ ale punctului M'' sînt proiecțiile pe Oy ale vectorilor $\vec{v}_T$ și $\vec{a}_{cp}$. Modulele lor sînt $v = v_T \cos \omega t = r\omega \cos \omega t$ și, respectiv, $a = -a_{cp} \sin \omega t = -r\omega^2$ în ωt. Punînd în evidență amplitudinea, se obțin relațiile vitezei și accelerației punctului M'' în mișcarea oscilatorie armonică.

$$v = A\omega\cos \omega t \tag{5.3}$$

$$a = -A\omega^2 \sin \omega t. \tag{5.4}$$

Mișcarea punctului M'' se desfășoară *ca și cum* asupra lui ar acționa forța $\vec{F}_{cp}$ îndreptată spre punctul de echilibru O care i-ar imprima accelerația a, deși, în realitate, asupra acestui punct nu acționează nici o forță.

Justețea acestei afirmații poate fi probată cu un experiment simplu. Cu fasciculul paralel al unui proiector se luminează un pendul elastic care oscilează cu o frecvență nu prea mare (fig. 5.9). Umbra P' a sferei P, fixată pe discul D care se rotește uniform apare pe ecran alături de umbra C' a bilei C care oscilează armonic. Luminînd din planul discului, umbra C' a lui C, ca și umbra lui P, efectuează oscilații pe drepte paralele. Reglînd perioada de rotație

a lui P, astfel încît să fie egală cu perioada de oscilație a lui C, se va observa că mișcarea celor două umbre se face *sincronizat*.

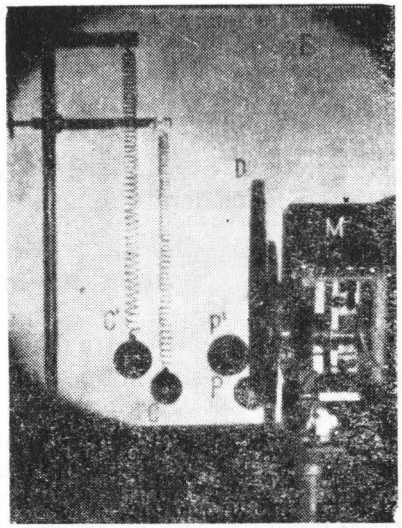


Fig. 5.9. O demonstrație experimentală a justeței analogiei între mișcările punctelor M și M'' din figura 5.8. Discul D este rotit uniform de motorul M. Turația se poate regla

5.1.3. Caracteristicile mișcării oscilatorii armonice

Faza. Argumentului funcției $y = A \sin \omega t$, $\varphi = \omega t$, se numește faza mișcării oscilatorii. Faza se măsoară în radiani și este una dintre mărimile de stare ale oscilatorului. La momentul inițial $t = 0$ faza mișcării este zero, în cazul ecuației (5.2). Dacă oscilatorul M'' ar fi fost la momentul inițial nu în O ci în O_1 corespunzător punctului M_0 de pe cerc, faza la $t = 0$ ar fi fost φ_0 iar la momentul t, $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ (fig. 5.7, *a*). Ecuația de mișcare ar fi fost atunci

$$y = A \sin (\omega t + \varphi_0). \tag{5.5}$$

Se vede că (5.2) este un caz particular al ecuației (5.5) a cărei fază este $\varphi = \omega t + \varphi_0$, cu φ_0 fază inițială.

Mărimea ω se numește *pulsație* și se măsoară în radiani pe secundă. Este clar, dacă se face comparație cu ecuația mișcării circulare uniforme, că ω este viteza de variație a fazei.

Observație. Legile (5.3) și (5.4) de variație a vitezei și a accelerației au forma caracteristică unei oscilații armonice. Se obișnuiește să se spună în aceste cazuri că viteza și accelerația sînt mărimi care oscilează.

Se observă că, folosind relația

$$\cos \omega t = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right), \tag{5.3}$$

mai poate fi scrisă: $v = A\omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Faza vitezei este $\omega t + \pi/2$. Între viteza și elongația oscilatorului armonic considerate în această ordine există o diferență de fază sau un defazaj

$$\Delta\varphi = \omega t + \pi/2 - \omega t = \pi/2.$$

Dacă diferența de fază între două mărimi oscilatorii armonice este π sau zero mărimile sînt în opoziție de fază sau *în concordanță de fază**.

Perioada. Măsurăm cu cronometrul timpul necesar pentru ca leagănul să treacă de două ori succesiv și în același sens prin aceeași poziție. Mișcarea oscilatorului între două treceri de acest fel se numește o *oscilație*. Timpul necesar efectuării unei oscilații se numește *perioadă*, T; unitatea de măsură a perioadei este secunda:

$$[T] = \text{s}.$$

Caracterul periodic al mișcării oscilatorului armonic se reflectă în faptul că legea lui de mișcare este exprimată printr-o funcție periodică

$$A \sin \omega(t + T) = A \sin (\omega t + 2\pi), \text{ sau}$$

$$\omega t + \omega T = \omega t + 2\pi, \text{ de unde}$$

$$T = 2\pi/\omega, \tag{5.6}$$

Oscilația armonică a pendulului elastic este determinată de inerție și de forța de revenire de tip elastic $\vec{F} = -k\vec{y}$, care conform legii a doua a dinamicii, imprimă pendulului de masă m o accelerație de aceeași orientare. Deci $\vec{F} = m\vec{a} = -k\vec{y}$ sau transcriind-o scalar și ținînd seama de (5.2) și (5.4) se obține succesiv

$$-kA \sin \omega t = -mA\ \omega^2 \sin \omega t$$

relația satisfăcută în orice moment. Rezultă:

$$k = m\omega^2 \tag{5.7}$$

și folosind (5.6) avem succesiv: $k = m\frac{4\pi^2}{T^2}$ și

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{5.8}$$

Observăm că *perioada oscilației armonice depinde de proprietățile inerțiale (prin masa m) și elastice (prin k constanta elastică) și nu depinde de condițiile inițiale, adică de amplitudinea A.* Un anumit pendul elastic (m, k date) are o anumită perioadă proprie, fapt observat experimental.

Frecvența. Într-un interval de timp Δt oscilatorul efectuează n oscilații. Astfel, raportul

$$\frac{n}{\Delta t} = \frac{n}{nT} = \frac{1}{T},$$

numeric egal cu numărul de oscilații efectuate în unitatea de timp se numește frecvență și se notează cu ν. Deci, prin definiție

$$\nu = \frac{1}{T}. \tag{5.9}$$

Unitatea de măsură rezultă din (5.9): $[\nu] = \frac{1}{T} = s^{-1}$. Această unitate poartă numele de hertz (simbol Hz)*.

* Pentru acest caz se mai utilizează expresia „*în fază*".

* În onoarea lui Heinrich Hertz (1857–1894), fizician german.

Este evident, ținînd seamă de (5.9), că orice pendul elastic are și o frecvență proprie

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Dependența exprimată de (5.8) este explicabilă din punct de vedere fizic. Pentru o masă dată, dacă forța elastică crește rapid cu distanța (k, mare), corpul este frînat într-un interval mai scurt, revine deci mai repede spre poziția de echilibru (T mic), și invers. Dacă pentru un k dat masa m a corpului este mare, aceeași forță produce o accelerație mai mică și corpul este frînat mai lent (T mare), și invers.

5.1.4. Metoda stroboscopică de măsurare a frecvenței

Măsurarea perioadei sau a frecvenței unui oscilator nu este o problemă dificilă în cazul în care perioada oscilației este mare, respectiv frecvența este mică. Determinarea perioadei poate fi efectuată cu cronometrul sau măsurînd timpul necesar efectuării mai multor oscilații și împărțindu-l la numărul acestora.

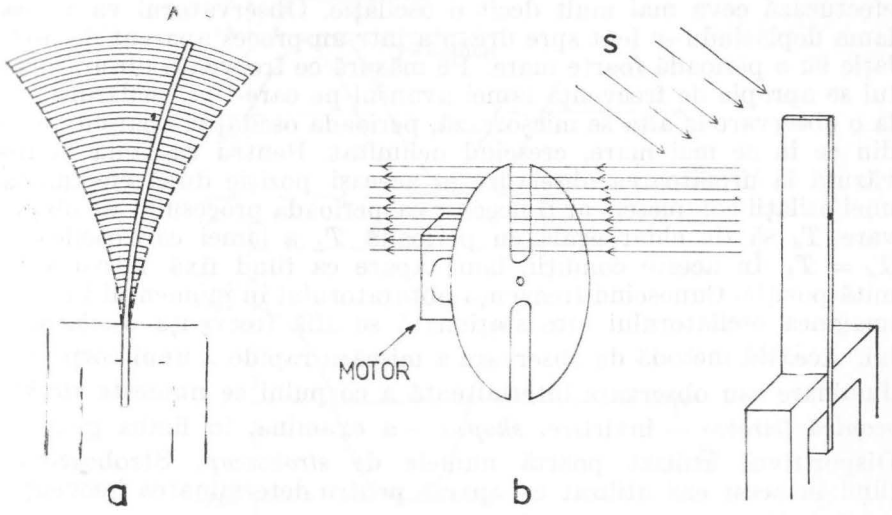
Acesta este însă un caz mai puțin frecvent. Chiar mai înainte ca frecvența să fie mai mare de 20 hertzi, observarea directă devine ineficace, deoarece ochiul nu poate urmări oscilatorul pe traiectorie datorită inerției în timp a imaginii. Măsurarea frecvenței cu cronometrul devine deci imposibilă.

În acest paragraf se dă o metodă de măsurare a frecvenței unui oscilator prin compararea frecvenței oscilatorului cu o frecvență cunoscută.

Presupunem că dorim să măsurăm frecvența oscilațiilor unei lame de oțel prinsă într-o menghină. Lama poate fi pusă în stare de oscilație excitînd-o prin tragerea ei într-o poziție laterală și lăsînd-o apoi liberă.

Prin observare directă, ne dăm seama că prin varierea lungimii porțiunii care este lăsată în afara menghinei frecvența oscilațiilor lamei ν_L se modifică. Cu cît lungimea capătului liber e mai mică, frecvența crește. Se potrivește această lungime astfel ca frecvența lamei să fie suficient de mare, încît ochiul să nu mai distingă clar conturul ei (fig. 5.10).

Oscilatorul iluminat continuu cu o lampă de proiecție (S) este privit din spatele unui disc în care se lasă o deschidere (fig. 5.10, *b*). Discul obturator este rotit de un motor electric cu o frecvență de rotație ν_d, constantă dar reglabilă. Oscilatorul poate fi văzut numai în intervalul de timp foarte scurt în care trece fanta. Timpul între



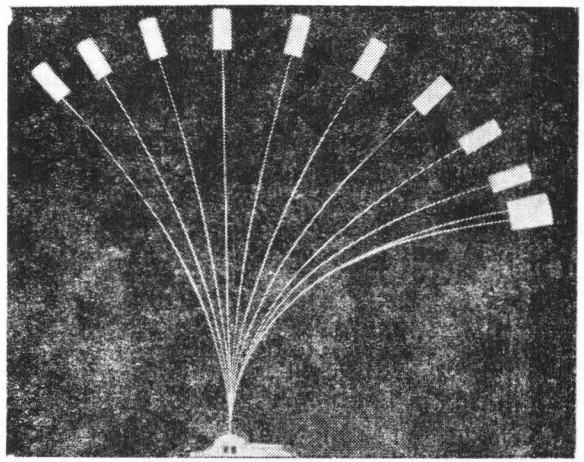


Fig. 5.10. Metoda stroboscopică de măsurare a frecvenței (*a* și *b*). O fotografie a oscilației lamei elastice, obținută cu stroboscopul (*c*).

două observări consecutive este chiar perioada de rotație a discului obturator $T_d = 1/\nu_d$.

Presupunem că la prima observare lama a fost văzută în poziția A îndreptîndu-se, de exemplu, spre dreapta (fig. 5.10, *a*). Dacă perioada obturatorului este cu puțin mai mare decît a lamei T_L ($T_d > T_L$), în intervalul de timp pînă la a doua observare lama efectuează ceva mai mult decît o oscilație. Observatorul va vedea lama deplasîndu-se lent spre dreapta într-un proces aparent de oscilație cu o perioadă foarte mare. Pe măsură ce frecvența obturatorului se apropie de frecvența lamei avansul pe care-l ia oscilatorul de la o observare la alta se micșorează, perioada oscilației aparente este din ce în ce mai mare, crescînd nelimitat. Pentru ca lama să fie văzută la următoarea observare în aceeași poziție după efectuarea unei osilații complete, ar fi necesar ca perioada procesului de observare T_d să fie chiar egală cu perioada T_L a lamei care oscilează, $T_d = T_L$. În aceste condiții, lama apare ca fiind fixă într-o anumită poziție. Cunoscînd frecvența obturatorului în momentul în care imaginea oscilatorului este staționară se află frecvența oscilatorului. Această metodă de observare a mișcării rapide a unui corp prin iluminare sau observare intermitentă a corpului se numește *stroboscopică* (*strobos* — învîrtire, *skopeo* — a examina, în limba greacă). Dispozitivul utilizat poartă numele de *stroboscop*. Stroboscopul fiind în acest caz utilizat ca aparat pentru determinarea frecvenței unui oscilator, se numește *frecvențmetru*.

5.1.5. Reprezentarea geometrică a mișcării oscilatorului armonic

Reprezentarea grafică. Variația funcției (5.2) este dată în tabelul următor, în care s-au trecut cîteva valori ale lui t în decurs de o perioadă : $t \in \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$, deoarece funcția sinus este periodică

t	0	$\frac{\pi}{2\omega}$	$\frac{\pi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}$
ωt	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	A	0	$-A$	0

Graficul funcției, desenat în figura 5.11, *a*, este o sinusoidă. S-a figurat și graficul oscilației (5.5), care este defazată cu

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 - \omega t = \varphi_0$$

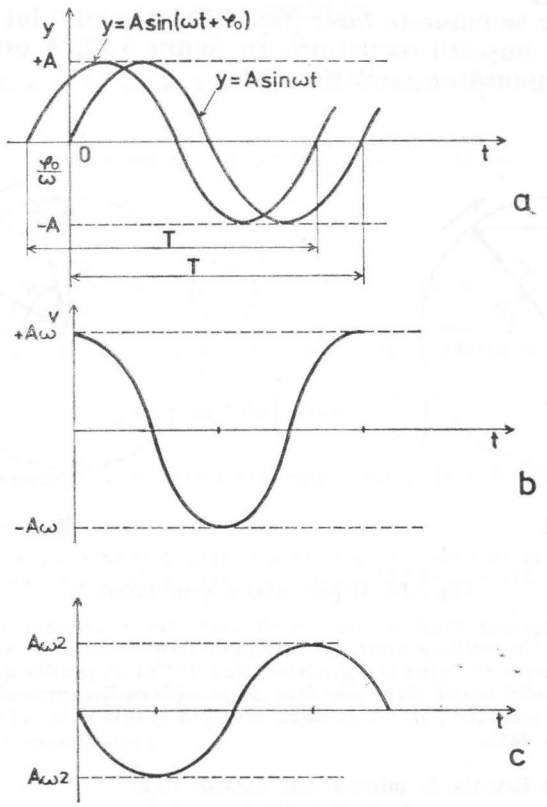


Fig. 5.11. Reprezentarea grafică a elongației *(a)*, vitezei *(b)* și accelerației oscilatorului armonic *(c)*.

înaintea oscilației (5.2). Întrucît perioada și amplitudinea ambelor oscilații sînt aceleași, graficul lui (5.5) se desenează printr-o translație în stînga cu φ_0/ω.

În figurile 5.11, *b* și *c* sînt reprezentate funcțiile (5.3) și (5.4) defazate cu $\pi/2$ și, respectiv, cu π înaintea elongației (5.2).

Reprezentarea prin fazori (Fresnel)*. În locul vectorului $\vec{y}$ se alege vectorul $\vec{r}$, a cărui proiecție pe axa Oy este $\vec{y}$ și care are o mișcare de rotație în sens contrar acelor unui ceasornic, cu o viteză unghiulară ω făcînd la un moment dat unghiul de fază $\varphi = \omega t$ cu semiaxa Ox originea fazelor. (fig. 5.12,a)

Vectorul $\vec{r}$ se numește *fazor* (fig. 5.12). Modulul lui $\vec{r}$ este egal cu amplitudinea mișcării oscilatorii. În figura 5.12, *b* este reprezentat fazorul corespunzător oscilației (5.5).

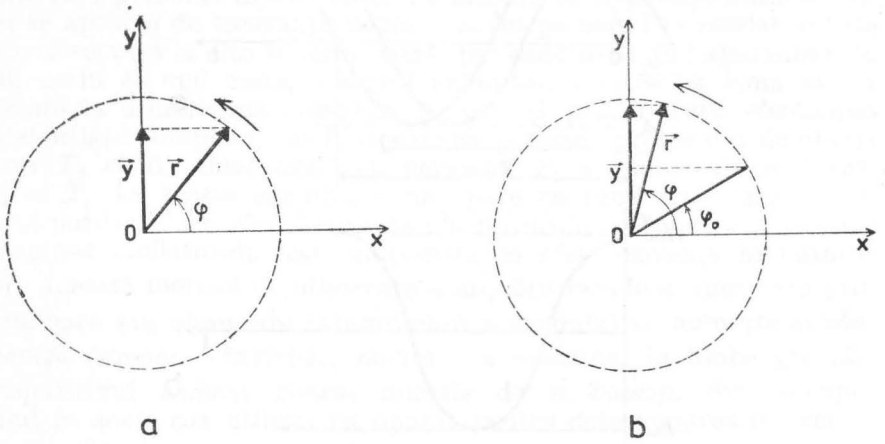


Fig. 5.12. Reprezentarea prin fazori.

Exemple. 1. Un oscilator armonic cu amplitudinea oscilației de $8 \cdot 10^{-3}$ m se află la 0,01 s de la începerea oscilației la o depărtare de $4 \cdot 10^{-3}$m de poziția de echilibru în care s-a găsit la momentul inițial. Să se calculeze : a) pulsația oscilatorului ; b) perioada oscilației ; c) frecvența oscilației ; d) viteza oscilatorului în poziția dată ; e) accelerația oscilatorului în poziția dată.

Rezolvare. a) Ecuația de mișcare este dată de (5.2)

$$y = A \sin \omega t$$

care pentru momentul $t = 0{,}01$ s se scrie

$$4 \cdot 10^{-3} = 8 \cdot 10^{-3} \sin \omega t,$$

de unde rezultă

$$\sin \omega t = \frac{1}{2} \text{ sau } \omega t = \frac{\pi}{6} \text{ și } \omega = \frac{\pi}{6t} = \frac{\pi}{6 \cdot 10^{-2}} = \frac{100\,\pi}{6} = \frac{50\,\pi}{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

* Imaginată de Augustin Jean Fresnel (1788—1827), fizician francez.

b) Perioada se găsește aplicînd relația (5.6)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6\pi}{50\pi} = 0{,}12 \text{ s}$$

c) Frecvența se calculează din relația (5.9).

$$\nu = \frac{1}{T} \approx 8{,}33 \text{ Hz}$$

d) Viteza este dată de relația (5.3). Înlocuind și ținînd seama că $\omega t = \frac{\pi}{6}$

$$v = A\,\omega \cos \omega t = 8 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{50\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}36 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

e) Accelerația dată de (5.4) este :

$$a = -\omega^2 y = -\left(\frac{50\pi}{3}\right)^2 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = -10 \cdot 96 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

2. Legea de mișcare a unui oscilator armonic este exprimată în SI astfel :

$$y = 2 \cdot 10^{-2} \sin\left(100\,\pi t - \frac{\pi}{6}\right). \qquad \text{(I)}$$

a) Să se calculeze perioada, frecvența, amplitudinea, faza inițială și elongația în momentul inițial.

b) Să se reprezinte grafic legea de mișcare.

c) Să se scrie și să se reprezinte grafic legea de mișcare a unui alt oscilator cu aceleași caracteristici, dar care oscilează în avans de fază cu $\pi/12$ față de (I).

Rezolvare. Se compară direct legea de mișcare cu legea generală (5.5) : $y = \sin(\omega t + \varphi_0)$.

a) $A = 2 \cdot 10^{-2}$ m, $\omega = 100\,\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\varphi_0 = -\frac{\pi}{6}$ rad

Perioada și frecvența sînt :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50} \text{ s}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = 50 \text{ Hz},$$

iar elongația la momentul inițial

$$y_0 = 2 \cdot 10^{-2} \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -10^{-2} \text{ m}.$$

b) Pentru simplificare, în loc de a reprezenta oscilația (I), ne ocupăm mai întîi de oscilația

$$y = 2 \cdot 10^{-2} \sin 100\pi t \qquad \text{(II)}$$

defazată cu $\pi/6$ radiani înaintea oscilației I. Într-adevăr notînd cu α_I și α_{II} fazele oscilației I și, respectiv II se obține $=\alpha_{II} - \alpha_I = 100\pi\ t - 100\pi t + \pi/6$. Se alcătuiește tabelul de variație în care se determină valorile lui t pentru fazele care dau valorile principale ale funcției dintr-un interval $t \in \left[0, \frac{1}{50}\right]$, adică o perioadă:

α(rad)	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	2π
t(s)	0	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{3}{200}$	$\frac{1}{50}$
y(m)	0	$2 \cdot 10^{-3}$	0	$-2 \cdot 10^{-3}$	0

Reprezentăm grafic oscilația (II) și apoi efectuăm o translație a graficului cu $\pi/6$ rad spre dreapta (fig. 5.13).

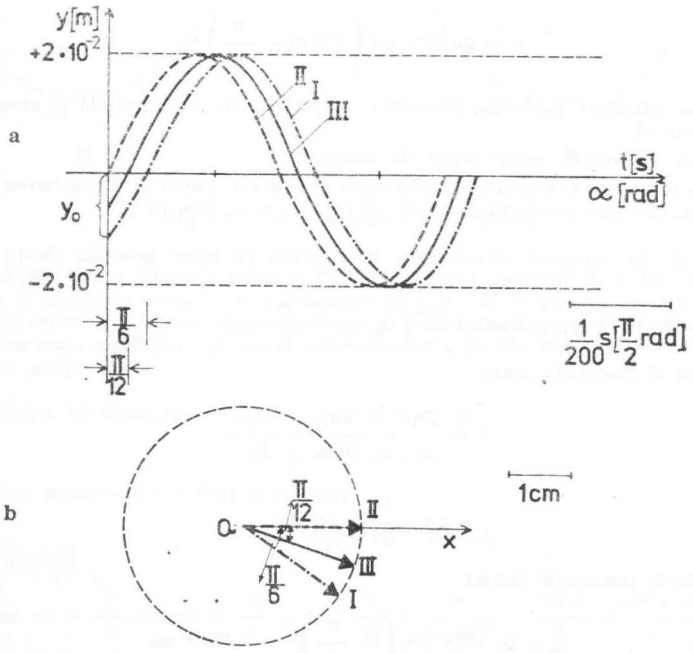


Fig. 5.13. Pentru exemplul de calcul.

c) Legea de mișcare a oscilatorului este

$$y = 2 \cdot 10^{-2} \sin (100\pi t + \varphi_x)$$

unde φ_x este faza la momentul inițial și trebuie determinată. Notînd cu α_{III} faza acestui oscilator rezultă $\Delta\varphi = \alpha_{III} - \alpha_I = \pi/12$, din enunț. Deci:

$$\alpha_{III} - \alpha_I = (100\pi t + \varphi_x) - \left(100\pi t - \frac{\pi}{6}\right) = \varphi_x + \frac{\pi}{6}$$

sau

$$\varphi_x = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{12}.$$

Deci legea de mișcare cerută are forma

$$y = 2 \cdot 10^{-2} \sin\left(100\,t - \frac{\pi}{12}\right) \qquad \text{(III)}$$

și este reprezentată pe graficul 5.13, *a* printr-o linie groasă. Fazorial, I, II și III sînt reprezentate pe figura 5.13, *b*.

5.1.6. Energia oscilatorului armonic

În timpul desfășurării oscilațiilor unui oscilator armonic se efectuează un proces continuu de transformare a energiei mecanice din formă potențială în cinetică și invers.

La un moment dat t cînd elongația este y energia potențială a oscilatorului este

$$E_p = \frac{ky^2}{2}, \qquad (5.10)$$

unde k este constanta elastică a resortului.

În același moment t energia cinetică este

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 \qquad (5.11)$$

unde m și v sînt masa oscilatorului și, respectiv, viteza lui în acel moment. Înlocuind în (5.10) și (5.11) expresiile (5.2) și (5.3) se obțin relațiile

$$E_p = \frac{kA^2 \sin^2 \omega t}{2} \quad \text{și} \quad E_c = \frac{mA^2\omega^2 \cos^2 \omega t}{2}$$

care însumate dau, folosind relația (5.7)

$$E_p + E_c = \frac{m\,\omega^2 A^2(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)}{2} = \frac{1}{2} mA^2\omega^2 = \frac{1}{2} kA^2,$$

deoarece $\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$

Suma dintre energia potențială și energia cinetică este energia mecanică totală E a oscilatorului. Deci

$$E = \frac{1}{2} mA^2\omega^2 = \frac{1}{2} kA^2 = 2\pi^2\nu^2 mA^2. \qquad (5.12)$$

Rezultă că : *energia mecanică totală a oscilatorului este constantă în timp.*

Acest rezultat este firesc, în absența frecărilor și condiții perfecte de izolare. În expresia (5.12) intervin factori care depind de caracteristicile oscilatorului ν și m și un factor A, care nu depinde de oscilator, ci de perturbația inițială. (Reamintim că oscilațiile nu depășesc amplitudinea perturbației inițiale.) Energia mecanică a oscilatorului este o caracteristică a stării oscilatorului.

Există două moduri de reprezentare a acestei mărimi :

1) *Printr-un spectru.* Aceasta este o reprezentare a energiei în funcție de frecvență. În figura 5.14, *a*) se observă o oscilație simplă, ν_p fiind frecvența proprie (6 Hz). În figura 5.14, *b* se vede o fotografie luată pe ecranul oscilografului unui analizator*. Oscilația compusă

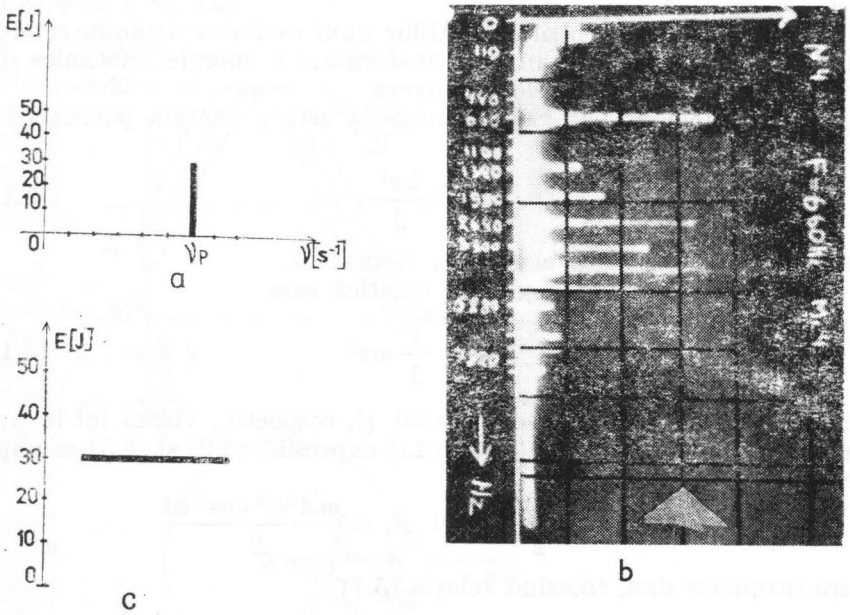


Fig. 5.14. Un spectru al unei oscilații.

* Aparat care analizează prin procedee electronice frecvența și energia unei oscilații și o fixează pe tubul unui oscilograf electronic.

este descompusă spectral în oscilații de diferite frecvențe. Este evident că energia oscilației cu frecvența $\nu = 660$ Hz este cea maimare (≈ 35 J.

2) *Printr-o schemă de nivele energetice* în care se înscrie numai energia totală (fig. 5.14, *c*). Energia oscilatorului este aceeași în cazurile *a* și *c* (30 J).

Energia mecanică a unui oscilator armonic se transformă din forma cinetică în potențială și invers. Se observă că în momentul în care pendulul elastic își atinge amplitudinea energia oscilatorului este exclusiv potențială. În mișcarea de revenire energia potențială scade, crescînd energia cinetică ; în punctul *O* energia cinetică este maximă, cea potențială anulîndu-se. Mișcîndu-se în continuare datorită inerției, transformările au loc invers pînă la întoarcerea pendulului din nou către poziția de echilibru.

Această transformare periodică a energiei unui oscilator mecanic ideal din forma potențială în cinetică, și invers, constituie o caracteristică esențială a procesului de oscilație.

5.1.7. Pendulul gravitațional

În figura 5.15 este prezentată o mică sferă, de masă m, suspendată de un fir subțire, ușor și foarte puțin extensibil. Acest pendul este un model de pendul gravitațional ideal. Poziția de echilibru a pendulului este la verticală. Deplasat lateral și lăsat apoi liber, pendulul oscilează (fig. 5.16). Este această mișcare o oscilație armonică ?

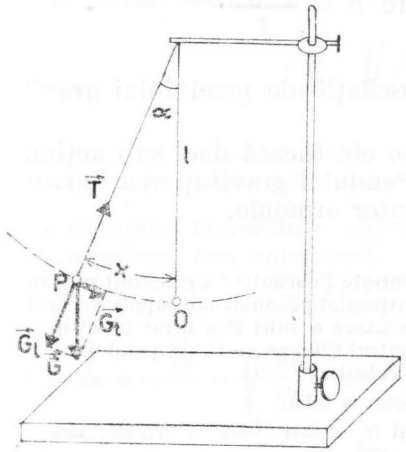


Fig. 5.15. Pendulul gravitațional.

Observăm că forța de readucere în poziția de echilibru are modulul $G_t = G \sin \alpha$, unde G este greutatea sferei, iar α este unghiul făcut la un moment dat de poziția firului cu verticala.

Devierea la un moment dat a pendulului P față de poziția de echilibru este dată de arcul $\widehat{PO} = x = l\alpha$, unde l este lungimea pendulului, α fiind măsurat în radiani. Se observă că forța de revenire nu este proporțională cu devierea. Forța de revenire nu este de tip elastic, iar oscilația pendulului nu este armonică. La pendulul gravitațional nu se mai poate vorbi de o perioadă proprie. Os-

cilaţiile lui nu sînt izocrone*, adică două oscilaţii cu amplitudine diferită au perioade diferite. Acest fapt a fost observat chiar de Galilei. Din orice tabel de valori ale sinusului unui arc se observă că pentru $\alpha < 0{,}0873$ radiani (5°), $\alpha \approx \sin \alpha$. În aceste cazuri (oscilaţii mici) forţa de revenire poate fi scrisă sub forma:

$$G_t = mg \sin \alpha \approx mg\, \alpha = mg \frac{x}{l} = \frac{mg}{l} \cdot x.$$

Pentru unghiuri α mici forţa de revenire este aproximativ de tip elastic (*forţă cvasielastică*). Cu această observaţie se poate aplica relaţia (5.8) pentru calcularea perioadei oscilaţiilor pendulului cînd amplitudinea este sub 5°

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{l}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (5.13)$$

deoarece în relaţia forţei de revenire $k = \dfrac{mg}{l}$.

Se observă că perioada micilor oscilaţii ale pendulului gravitaţional nu depinde de masa lui.

Oscilaţiile sub 5° ale pendulului se efectuează deci sub acţiunea unei forţe de revenire cvasiclastică. Pendulul gravitaţional poate fi considerat în aceste condiţii un oscilator armonic.

Exemplu. Pentru a dovedi că Pămîntul se roteşte Foucault** a construit un pendul de 67 m cu o bilă de masă egală cu 28 kg. El a suspendat pendulul sub cupola Panteonului din Paris. Un indice plasat sub punctul de fixare a bilei lăsa urme pe nisipul fin strîns sub forma unui cerc cu raza de 2,5 m, centrul fiind pe verticala pendulului aflat în echilibru. Amplitudinea este de 3 m. Să se calculeze:

a) perioada oscilaţiilor; b) ecuaţia de mişcare a bilei.

c) Ce demonstrează deplasarea continuă şi în acelaşi sens a urmelor lăsate pe nisip de indicele pendulului? Se ia $g = 9{,}8$ m · s^{-2}

** *Izo* — acelaşi; *cronos* — timp (lb. greacă).

* Leon Foucault (1819—1868), fizician francez.

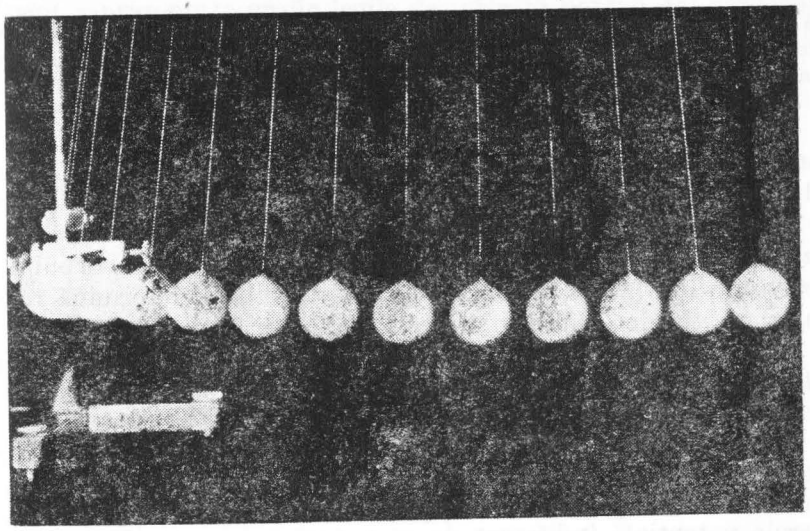


Fig. 5.16. Fotografie stroboscopică a oscilaţiei unui pendul gravitaţional.

Rezolvare

a) Perioada este dată de (5.13)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{67}{9{,}8}} \approx 16{,}4 \text{ s}.$$

b) La o amplitudine de 3 m şi pentru o lungime de 67 m, $\sin \alpha \approx \dfrac{3}{67} \approx 0{,}045$, ceea ce ne dă dreptul, să considerăm oscilaţia cvasiarmonică.
Deci, considerînd faza iniţială nulă,

$$y = A \sin \omega t$$

sau, cum $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{9{,}8}{67}} = 0{,}38 \dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$;

$$y = 3 \sin 0{,}38\ .$$

c) Oscilaţia liberă a unui pendul se face într-un sistem inerţial mereu în acelaşi plan vertical. Deplasarea urmei lăsate pe nisip poate fi interpretată doar ca mişcare a Pămîntului însuşi. Cînd Pămîntul se roteşte în jurul axei sale, poziţia pardoselei pe care se

află nisipul se modifică față de planul de oscilație, rămas neschimbat Observatorul din sistemul legat de Pămînt, care nu-și dă seama de mișcarea Pămîntului, afirmă rotația planului pendulului.

Concluzie. Atît în cazul pendulului elastic cît și a celui gravitațional, energia potențială a oscilatorului este o funcție care în intervalul de definiție admite un minim. În poziția de echilibru oscilatorul se află într-o groapă de energie potențială ceea ce conferă acestei poziții calitatea de a fi de echilibru stabil. Scoaterea corpului din această poziție (excitarea lui) și lăsarea lui liberă determină revenirea la poziția de echilibru și efectuarea unor oscilații.

Orice sistem aflat în echilibru stabil într-o groapă de energie potențială are posibilitatea să oscileze liber în jurul poziției pentru care energia potențială este minimă.

Această concluzie a fost dedusă pentru oscilatori la care energia potențială este de natură elastică sau gravitațională. Dar afirmația rămîne valabilă pentru orice sistem care se află într-o groapă de energie potențială indiferent de ce natură este această energie.

Nu toate corpurile pot efectua oscilații libere, de exemplu bila din figura 5.1, *a*. În acest caz orice poziție a bilei este de echilibru (stabil).

5.1.8. Transferul energiei între oscilator și un sistem exterior lui

1°. Transferul energetic între oscilator și mediu poate fi în primul rînd un *transfer de la oscilator la mediul înconjurător*, o disipare a energiei oscilatorului. Vom considera două cazuri: a) cînd frecarea este redusă și b) cînd frecarea este foarte mare.

a) Acest proces are ca efect întotdeauna amortizarea oscilațiilor Amplitudinea oscilațiilor devine tot mai mică în timp, pînă la stingerea lor completă.

b) Cînd forța de frecare este foarte mare oscilatorul lăsat liber nu poate depăși poziția de echilibru, întreaga energie primită în procesul de excitație fiind disipată mediului înconjurător pe drumul de revenire pînă în poziția de echilibru, unde rămîne în repaus. Mișcarea nu mai este periodică, ea se numește aperiodică. O astfel de mișcare execută un pendul elastic sau gravitațional introdus într-un mediu rezistent, de exemplu într-un lichid vîscos. În figura

5.17 sînt reprezentate grafic legile de mișcare pentru doi oscilatori: în figura 5.17, *a* se observă o oscilație amortizată, iar în figura 5.17, *b*, o mișcare aperiodică.

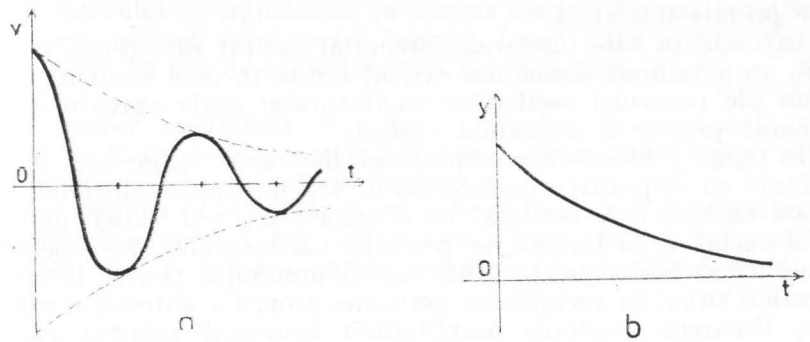


Fig. 5.17. a) Oscilație amortizată; b) mișcare aperiodică.

2°. *Transferul energiei de la un sistem exterior la oscilator.* Oscilațiile unui sistem sub acțiunea periodică a altui sistem se numesc oscilații forțate. În figura 5.18 prin curba *1* se reprezintă grafic

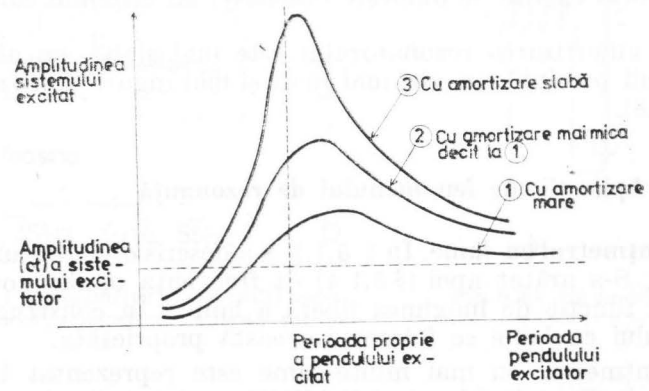


Fig. 5.18. Curbe de răspuns ale unui sistem oscilant excitat cu o forță perturbatoare periodică.

dependența amplitudinii oscilațiilor unui sistem excitat, care oscilează cu o amortizare mare, în funcție de perioada unui sistem excitator de masă mare. Se conturează vag o creștere a amplitudinii sis-

temului excitat. Curbele trasate în acest grafic sînt construite pe baza unor date obținute cu dispozitive experimentale care permit determinări cantitative mai precise. Aceste curbe se numesc *de răspuns* pentru că înregistrează reacția sistemului excitat la excitațiile primite din afară.

În cazul în care mișcarea sistemului excitat este puțin amortizată, amplitudinea sistemului excitat crește în mod evident pentru valori ale perioadei oscilațiilor excitatorului egale aproximativ cu perioada proprie a sistemului excitat.

În figura 5.18 este reprezentată grafic (curba 2), pe baza datelor obținute cu dispozitive perfecționate, dependența amplitudinii unui sistem excitat, care oscilează cu o amortizare mai slabă decît în cazul curbei *1*, în funcție de perioada excitatorului. Se observă că în acest caz curba prezintă un maxim pronunțat pentru intervalul de valori situat în vecinătatea perioadei proprii a sistemului excitat. Dar, deoarece creșterea amplitudinii înseamnă mărirea energiei sistemului, rezultă că:

Transferul energiei de la excitator la sistemul excitat, care se face pentru orice perioadă a excitatorului, este maxim pentru perioade aflate în vecinătatea perioadei proprii a sistemului excitat. Acest proces selectiv de transfer de energie între două sisteme fizice se numește *rezonanță*.

Oscilatorul excitat se numește *rezonator*, iar sistemul care excită, *excitator*.

Cu cît amortizarea rezonatorului este mai slabă, cu atît curba amplitudinii prezintă un vîrf mai înalt și mai îngust (curba 3 de pe figura 5.18).

5.1.9. Aplicații ale fenomenului de rezonanță

Frecvențmetrul cu lame. În § 5.1.1 s-a descris oscilația unei lame încastrate. S-a arătat apoi (§ 5.1.4) că frecvența oscilațiilor proprii variază în funcție de lungimea liberă a lamei. În construcția frecvențmetrului cu lame se folosește această proprietate.

Frecvențmetrul cu mai multe lame este reprezentat în figura 5.19. Lamele L au lungimea variabilă, frecvența proprie a lamelor alăturate diferind cu 1 Hz. Soclul S este montat direct pe oscilatorul a cărui frecvență se determină. Gama de frecvențe pentru care se construiește depinde de domeniul în care este folosit. De exemplu, setul din figura 5.19, *a* poate fi utilizat pentru $\nu \in [45, 55]$ Hz. De obicei acest tip este utilizat pentru măsurarea oscilațiilor cu frecvențe mai mici de 1000 Hz. Dacă, de exemplu, aparatul este

excitat cu frecvența de 50 Hz, lama cu aceeași frecvență proprie intră în rezonanță. Pe figura 5.19, *b* se observă, privit de sus, cum arată setul de lame în acest caz. Amplitudinea lamei cu frecvența proprie de 50 Hz este cea mai mare. La alte frecvențmetre oscilațiile oscilatorului se transformă în curent electric variabil transmis unui electromagnet care excită lamele. Lama care are frecvența proprie egală cu cea de excitație intră în rezonanță.

Întreținerea oscilațiilor. Un caz particular de rezonanță este procesul de întreținere a oscilațiilor. Vom ilustra acest proces prin un exemplu, și anume *soneria electrică*.

Lama elastică L a ciocănelului este un oscilator care oscilează cu o perioadă proprie T sub acțiunea unei forțe elastice de revenire (fig. 5.20). La închiderea întrerupătorului I electromagnetul E

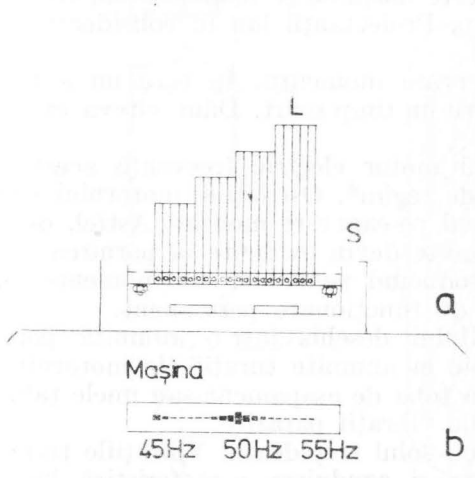


Fig. 5.19. a) Frecvențmetru cu mai multe lame; b) reprezentarea schematică a unui set de lame.

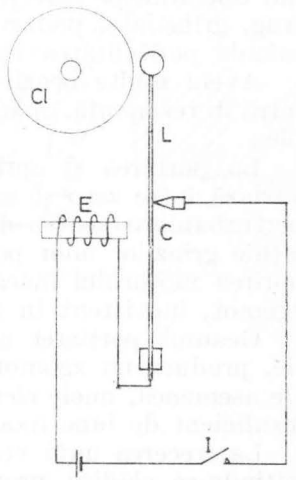


Fig. 5.20. Un model de sonerie.

excită lama punînd-o în oscilație. Mișcarea lamei determină deschiderea circuitului și dispariția forței perturbatoare. Lama își continuă oscilația pînă la contactul C, în drum lovind clopotul. Cînd lama revine pe contact se comandă un nou transfer de energie de la electromagnet și procesul se repetă. Perioada procesului de transfer este comandată de oscilatorul însuși, lama elastică. Este un fenomen de rezonanță.

Evitarea rezonanței și amortizarea vibrațiilor. În proiectarea mașinilor și construcțiilor, vibrațiile mecanice sînt în general evitate cu grijă, deoarece ele produc defectarea și chiar distrugerea mașinilor sau a construcțiilor.

Carcasele motoarelor și generatoarelor, grinzile și planșeele construcțiilor, podurile au prin construcție o frecvență proprie de oscilație. În funcționare, aceste elemente execută oscilații forțate datorită unor sisteme exterioare care produc excitații periodice sau neperiodice.

În cazul excitațiilor periodice se poate ajunge la rezonanță, cînd frecvența perturbatoare are valoarea aproximativ egală cu aceea a elementului excitat. În această situație, amplitudinea oscilațiilor provocate sistemului excitat fiind mare duce la apariția unor solicitări care depășesc limita de proporționalitate din legea lui Hooke, produc deformații permanente sau chiar distrugerea sistemului. Soclurile pe care sînt montate mașinile se fisurează sau se distrug, grinzile și podurile se rup. Proiectanții iau în considerare în calcule posibilitatea rezonanței.

Avem multe ocazii să observăm momentul în care un sistem intră în rezonanță, măcar pentru un timp scurt. Dăm cîteva exemple :

La pornirea și oprirea unui motor electric frecvența acestuia variază între zero și valoarea de regim*. Oscilațiile motorului sînt perturbatoare pentru dispozitivul pe care este montat. Astfel, oscilațiile grinzilor unor poduri rulante devin evidente la pornirea sau oprirea motorului macaralei producînd pentru cîteva momente un zgomot, inexistent în regimul de funcționare permanent.

Geamul portierei automobilului deschis într-o anumită poziție, produce un zgomot puternic la anumite turații ale motorului. De asemenea, unele elemente ca toba de eșapament sau unele table insuficient de bine fixate produc vibrații parazite.

La trecerea unui vehicul greu solul trepidează. Vibrațiile transmițîndu-se clădirii provoacă uneori zguduirea caracteristică binecunoscută a geamurilor.

În general, funcționarea oricărui sistem care poate oscila este analizată și din punctul de vedere al evitării fenomenelor descrise mai sus. Se evită mai ales producerea rezonanței. Există multe metode și dispozitive prin care se realizează acest obiectiv.

Descriem aici amortizorul, utilizat în special la autovehicule. Acest dispozitiv amortizează vibrațiile provocate de suspensiile automobilelor. În prezent, cel mai folosit tip este amortizorul telescopic. În figura 5.24, *a* este desenat amortizorul telescopic monotubular. Cînd tija *1*, care se deplasează împreună cu pistonul *3*, se mișcă spre exterior lichidul care umple compartimentul *4* este obligat să treacă prin supapele de destindere *5* în compartimentul *6*. Cînd mișcarea se produce în sens invers lichidul trece prin piston în sens invers prin supapele de comprimare *7*. Rolul pistonului separator *8* este de a lăsa să pătrundă lichidul din, sau spre camera de compensare *9* printr-un mecanism cu supape asemănător pistonului *3*. Lichidul suplimentar este necesar pentru a nu lăsa goluri în compartimentul *6* cînd pistonul se retrage. Prin trecerea lichidului între compartimentele *4* și *6* se realizează o forță de frînare care amortizează repede orice oscilație de la capetele tijelor.

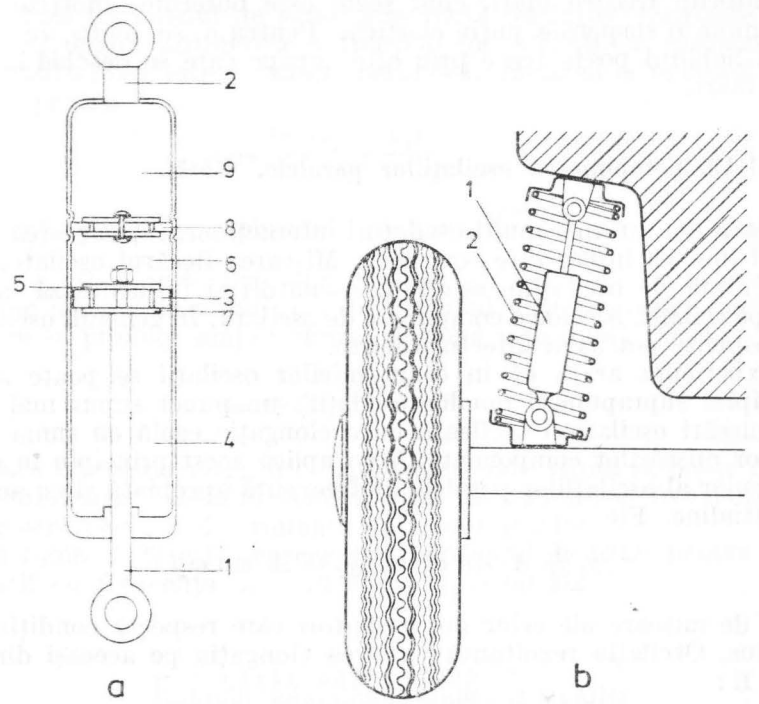


Fig. 5.21. Amortizorul *(a)* și felul cum e montat la un autoturism Dacia 1100*(b)*.

În figura 5.21, *b* se observă montarea unui amortizor la una din roțile din spate ale autoturismului Dacia 1100. Amortizorul *1*

* Frecvența de rotație, constantă, pe care o are rotorul în funcționare normală.

este fixat coaxial cu arcul 2 cu una din tije pe caroserie, iar cu cealaltă pe una din axele punții. Cînd roata întîlnește o neregularitate a drumului, puntea începe să oscileze față de caroserie. Oscilațiile preluate de arc sînt amortizate rapid de amortizor, deoarece spira de jos a arcului este solidară cu capătul de jos al amortizorului. Întrucît mișcarea acestuia este frînată de frecarea lichidului din interior, oscilația se stinge după 2—3 curse.

Datorită frecării mari, cînd șocul este puternic amortizorul ar determina o suspensie puțin elastică. Pentru a se evita acest neajuns lichidul poate trece prin alte supape care se deschid la presiuni mari.

5.1.10. Compunerea oscilațiilor paralele. Bătăi.

Dacă doi sau mai mulți oscilatori interacționează, mișcarea sistemului luat ca întreg este complexă. Mișcarea fiecărui oscilator este influențată de oscilațiile celorlalți oscilatori și influențează la rîndu-i pe ceilalți. Are loc o compunere de oscilații. În general, oscilațiile componente pot avea direcții diferite.

Experiența arată că în cazul micilor oscilații se poate aplica principiul suprapunerii micilor oscilații: un punct supus mai multor mișcări oscilatorii oscilează cu o elongație egală cu suma elongațiilor mișcărilor componente. Vom aplica acest principiu în cazul particular al oscilațiilor paralele de frecvență apropiată și cu aceeași amplitudine. Fie

$$y_1 = A \sin \omega_1 t \text{ și } y_2 = A \sin \omega_2 t$$

legile de mișcare ale celor doi oscilatori care respectă condițiile de mai sus. Oscilația rezultantă va avea elongația pe aceeași direcție și va fi:

$$y = y_1 + y_2 = A(\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t).$$

Transformînd suma în produs, se obține

$$y = 2A \sin \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}$$

expresie care scrisă în funcție de frecvență are forma:

$$y = 2A \cos 2\pi \frac{(\nu_1 - \nu_2)t}{2} \sin 2\pi \frac{(\nu_1 + \nu_2)t}{2}$$

ceea ce exprimă o oscilație a cărei amplitudine variază periodic cu frecvența $\frac{\nu_1 - \nu_2}{2} = \nu_{ampl}$, și a cărei frecvență este $\nu = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$.

Dacă $\nu_1 = \nu_2$ oscilația rezultantă are amplitudine dublă în comparație cu componentele și aceeași frecvență cu ele, rezultat care se putea întrevedea.

Dacă frecvențele sînt diferite ($\nu_1 \neq \nu_2$), dar au valori apropiate, se produce fenomenul de *bătăi*. Frecvența oscilației rezultate este egală cu media aritmetică a frecvențelor oscilațiilor componente, iar amplitudinea este o funcție periodică, valoarea ei maximă fiind atinsă pentru

$$\cos \frac{2\pi (\nu_1 - \nu_2)t}{2} = \pm 1.$$

Frecvența atingerii amplitudinii maxime $\frac{\nu_1 - \nu_2}{2}$ este cu atît mai mică cu cît ν_1 este mai apropiat de ν_2. Deoarece ambele valori maxime ale amplitudinii apar în decursul unei perioade, frecvența cu care se produce amplitudinea maximă este dublă. Deci

$$\nu_{bătăi} = 2 \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} = \nu_1 - \nu_2. \qquad (5.14)$$

Dacă frecvența uneia din componente este știută se poate determina frecvența celeilalte componente, cunoscîndu-se frecvența bătăilor care poate fi determinată optic sau acustic.

În figura 5.22 este reprezentat fenomenul de bătăi pentru două oscilații cu frecvența $\nu_1 = 70$ Hz și $\nu_2 = 60$ Hz.

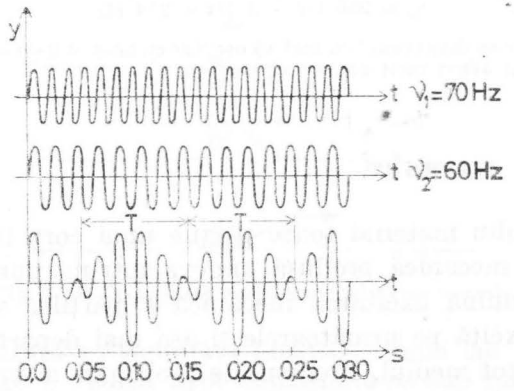


Fig. 5.22. Bătăi.

O aplicație a fenomenului de bătăi este acordajul instrumentelor cu coarde. Instrumentistului i se dă de către concert-maestru, sau își ia singur, un ton de comparație, de exemplu nota de 440 Hz (la). El modifică frecvența corzii prin rotirea cuiului pînă nu mai aude nici o bătaie. În acest caz $\nu_1 = \nu_2$; acordajul este perfect.

În principiu bătăile sînt folosite pentru măsurarea frecvenței unei oscilații date. Deoarece este imposibil de realizat o sincronizare perfectă, se procedează astfel încît diferența de frecvență să fie extrem de mică. Sesizarea bătăilor depinde în acest caz de finețea receptorului, iar sincronizarea este apreciată, în funcție de scopul și destinația acestei operații. Astfel, o sincronizare ca aceea explicată mai sus, percepută de organul auditiv și considerată satisfăcătoare de instrumentist apare clar pe ecranul unui osciloscop ca un fenomen de bătăi.

Exemplu. Două diapazoane oscilează simultan și dau 20 bătăi în 10 s, pe furca unuia din diapazoane fiind atașat un mic inel. Frecvența unuia din diapazoane, luată ca referință, este $\nu_1 = 256$ Hz. Să se calculeze frecvența celui de-al doilea diapazon?

Rezolvare. Conform relației (5.14) frecvența bătăilor este

$$\nu_{bătăi} = \nu_1 - \nu_2$$

unde, pentru cazul problemei, notăm cu ν_2 frecvența celui de-al doilea diapazon. Urmează că

$$\nu_2 = \nu_1 - \nu_{bătăi}$$

în care $\nu_{bătăi} = \dfrac{20}{10} = 2$Hz. Cu aceasta, relația precedentă dă

$$\nu_2 = 256 \text{ Hz} - 2 \text{ Hz} = 254 \text{ Hz}.$$

Dacă se dorește ca diapazonul cu inel să oscileze cu aceeași frecvență se poate modifica poziția inelului astfel încît bătăile să dispară.

5.2. Unde mecanice

Într-un mediu material toate părțile unui corp interacționează. O perturbație mecanică produsă undeva într-un punct oarecare al mediului determină excitarea mecanică a părților vecine, care la rîndul lor le excită pe următoarele și așa mai departe. Perturbația se propagă în tot mediul. Procesul de propagare a unei perturbații se numește *undă*. O caracteristică esențială a undei este faptul că

energia primită de la sursa de oscilații este transmisă pe tot mediul fără ca particulele acestuia să aibă deplasări mari.

5.2.1. Propagarea unei perturbații

În următoarele exemple se poate urmări procesul de transmitere a unei perturbații mecanice.

Cînd o garnitură de vagoane garată pe o linie primește un șoc de la locomotiva care este adusă pentru cuplare, șocul constituie o perturbație pentru garnitura aflată pînă atunci în repaus. Este vizibil cum impulsul se transferă rapid de-a lungul întregii garnituri în timp ce fiecare vagon se mișcă doar cu cîțiva centimetri pe aceeași direcție cu perturbația, rămînînd apoi în repaus. Deplasarea unei perturbații mai este numită *propagare*.

Perturbația produsă prin mișcarea bruscă în sus și în jos a capătului unei corzi aflată pînă atunci în repaus, se propagă sub forma unei bucle către extremitatea cealaltă. Un mic semn *S* pus pe coardă se ridică din poziția de repaus și revine în aceeași poziție, deplasarea efectuindu-se perpendicular pe direcția de propagare, exact ca și perturbația de la capătul corzii (fig. 5.23).

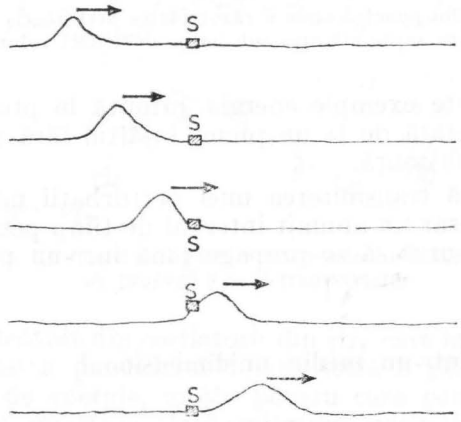


Fig. 5.23. Propagarea unei perturbații transversale.

O piatră căzută pe suprafața liniștită a unui lac produce o perturbație pe care o vedem apoi deplasîndu-se sub forma unor mici valuri circulare care se îndepărtează de locul în care a căzut piatra

(fig. 5.24). Obiectele ușoare care plutesc pe apă sînt puse temporar într-o mișcare de ridicare și coborîre, după care corpurile rămîn aproximativ în același loc.

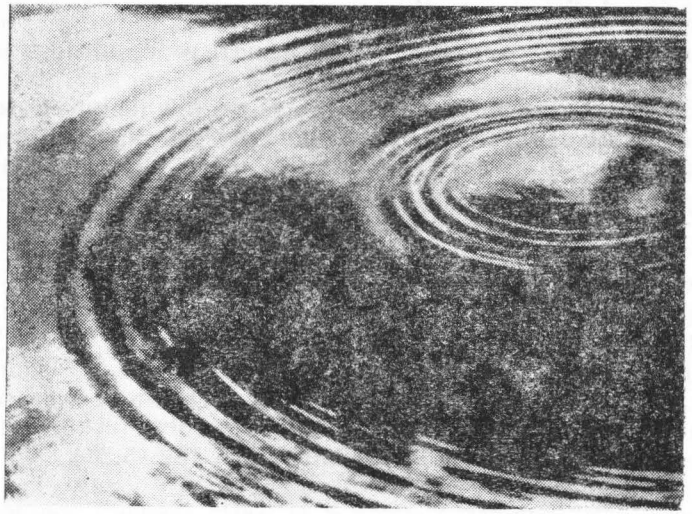


Fig. 5.24. Din punctul unde a căzut piatra perturbația se propagă pe suprafața apei sub forma unor mici valuri.

În toate aceste exemple energia primită în procesul de perturbare este transferată de la un punct la altul fără să se producă și transport de substanță.

Se observă că transmiterea unei perturbații nu se face instantaneu. Este necesar un anumit interval de timp pentru ca perturbația produsă de sursă să se propage pînă într-un punct oarecare al mediului.

5.2.2. Unde într-un mediu unidimensional

Unde transversale. Capătul unei corzi întinse este pus în oscilație mișcînd mîna în sus și în jos o singură dată. Prin această mișcare se produce o deformație transversală pe direcția corzii care se transmite progresiv spre celălalt capăt (fig. 5.25). Propagarea acestei perturbații se face prin mișcarea fiecărei secțiuni a corzii în sus și-n

jos într-o oscilație efectuată perpendicular pe direcția mișcării perturbației. O astfel de undă se numește *transversală*.

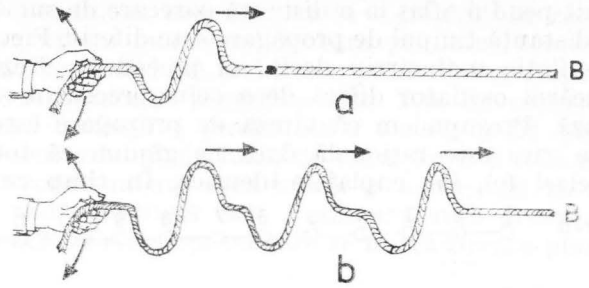


Fig. 5. 25. Pe coardă se propagă o perturbație (a) și un tren de unde (b).

Șirul pendulelor din figura 5.26 modelează un mediu unidimensional omogen, adică un mediu care are aceleași proprietăți în oricare punct al său. Punem în oscilație pendulul *1* dîndu-i o mișcare perpendiculară pe direcția șirului de sfere. Prin intermediul cuplajului energia oscilatorului *1* se transmite succesiv în șirul de oscilatori.

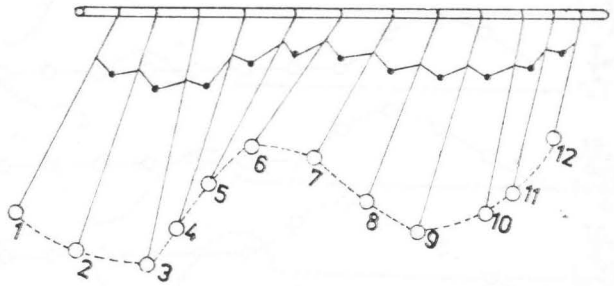


Fig. 5.26. Un model de mediu umidimensional elastic pe care se propagă o undă transversală.

Pentru mediul alcătuit din oscilatorii din șir, care la început se aflau în repaus, excitarea pendulului 1 constituie o perturbație. Acesta devine o sursă de energie, motiv pentru care pendulul *1* poate fi socotit sursă de oscilații. Dacă mișcarea oscilatorului sursă este menținută printr-un mijloc oarecare, mișcarea celorlalți oscilatori continuă. Fiecare oscilator execută oscilații armonice forțate sub acțiunea energiei primită de la sursă. Frecvența oscilațiilor fiecărui pendul este aceeași cu frecvența sursei indiferent de frecvența proprie. Procesul de propagare se face în timp.

Punînd din nou în oscilație pendulul 1 din șirul de sfere aflate în repaus, putem cronometra timpul după care perturbația ajunge la un anumit pendul aflat la o distanță oarecare de sursă. În funcție de această distanță timpul de propagare este diferit. Fiecare oscilator intră în oscilație mai tîrziu decît cel precedent. Rezultă că faza mișcării fiecărui oscilator diferă de a celui precedent și de a celui care urmează. Presupunem că viteza de propagare este constantă, presupunere care este rațională dacă ne gîndim că toți oscilatorii sînt de același fel, iar cuplajele identice. În timp ce perturbația

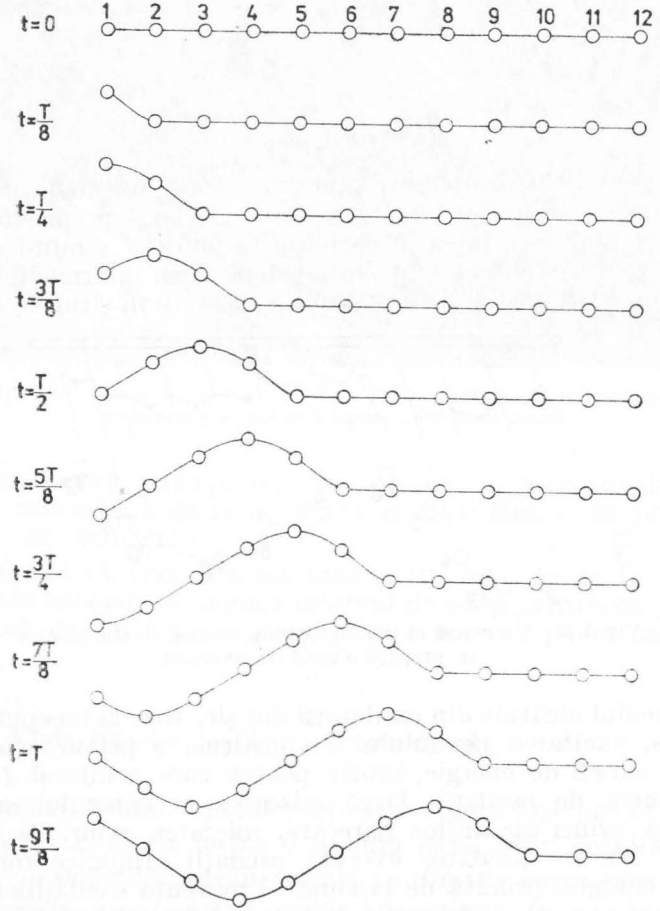


Fig. 5.27. Transmiterea unei oscilații armonice întreținute pe șirul din figura 5.26 (vedere pe plan orizontal).

avansează, oscilatorii care au început să se miște își continuă mișcarea oscilatorie armonică. Acest proces este ilustrat în figura 5.27, unde întreg lanțul de oscilatori din figura 5.26 este arătat văzut de sus. Șirul pendulelor este figurat în întregime în zece momente diferite, începînd cu momentul în care pendulul *1* este excitat și sfîrșind cu un moment după încheierea primei lui oscilații. Intervalul dintre două reprezentări succesive este T/8. Se observă că după încheierea unei oscilații a pendulului *1* există în șir pendule care oscilează în concordanță de fază, de exemplu *1* și *9* sau *2* și *10*.

Repetînd continuu mișcarea mîinii în același fel ca mai sus, se formează o undă continuă care avansează spre dreapta, așa cum arată figura 5.28. Frecvența cu care se mișcă fiecare punct al corzii

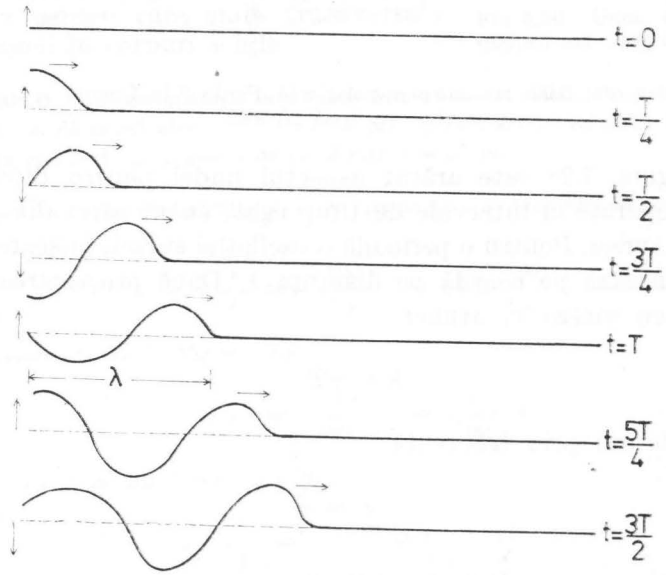


Fig. 5.28. O undă progresivă înaintează spre dreapta.

este aceeași cu frecvența sursei. Fiecare punct al corzii va oscila forțat continuu începînd din momentul în care mișcarea oscilatorie a ajuns la el, mișcarea lui fiind întreținută de energia sursei. Un astfel de regim se numește *regim permanent*. Dacă oscilația din figura 5.28 este efectuată de către sursă în planul hîrtiei, atunci orice punct de pe direcția de propagare oscilează în planul hîrtiei. Afirmația se poate dovedi experimental deplasînd de-a lungul corzii, în planul în care oscilează sursa, o deschidere (fantă) îngustă. Fanta

nu împiedică desfășurarea propagării (fig. 5.29). Se spune că unda este polarizată în planul în care oscilează sursa (planul hîrtiei).

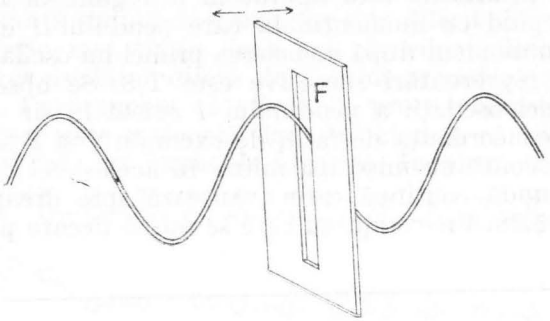


Fig. 5.29. O undă plan polarizată. Fanta F lasă punctele corzii să oscileze.

În figura 5.28 este arătat aspectul undei pentru diferite momente, separate la intervale de timp egale cu un sfert din perioada oscilației sursei. Pentru o perioadă a oscilației sursei, mișcarea oscilatorie avansează pe coardă pe distanța λ. Dacă propagarea se face uniform cu viteza v, atunci

$$\lambda = vT \tag{5.15}$$

sau exprimînd prin frecvență

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \tag{5.16}$$

λ se numește *lungime de undă* și fiind o lungime se măsoară în metri. Pentru exprimarea lungimii de undă cînd aceasta este foarte mică se mai utilizează angstromul (Å) 1 Å $= 10^{-10}$m. Dacă viteza nu se modifică cu timpul sau de-a lungul direcției de propagare, lungimea de undă nu se schimbă, fiind deci o caracteristică a undei în acel mediu.

Producerea undei transversale în coardă este posibilă datorită faptului că orice parte a corzii poate antrena în ridicare și coborîre părțile adiacente. Mișcările transversale creează în coardă o solicitare

de forfecare (fig. 5.30). Pe figura 5.30 sînt prezentate trei mici părți adiacente ale corzii. Mișcarea părții 2 nu se poate face fără ca aceasta să nu antreneze părțile 1 (prin forța $\vec{F}_{21}$) și 3 (prin forța $\vec{F}_{23}$) care la rîndul ei se opune prin forțele $\vec{F}_{12}$ și, respectiv, $\vec{F}_{32}$. Aceste legături asigură cuplajul părților *1*, *2*, *3*. Prin acțiunea forțelor de cuplaj se produc deformări elastice în corpurile elastice. Corpul solid poate prelua aceste solicitări, dar fluidele nu au această capacitate, deoarece au proprietatea de curgere, motiv pentru care unda transversală apare numai în corpuri solide.

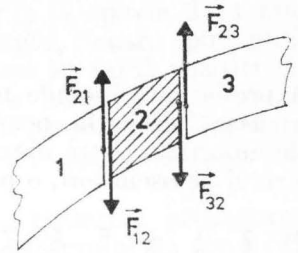


Fig. 5.30. Unda transversală implică solicitare de forfecare.

Exemplu. O mișcare oscilatorie se propagă într-un mediu elastic omogen și străbate 9 900 m în 3 s. Să se calculeze : *a*) viteza de propagare a acestei mișcări ; *b*) perioada ; *c*) frecvența ei știind că lungimea de undă este $\lambda = 33$ m.

Rezolvare. a) Mediul fiind omogen propagarea se face uniform cu o viteză v dată de

$$v = \frac{s}{t} = \frac{9\,900 \text{ m}}{3 \text{ s}} = 3\,300 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Folosind relația (5.15) se scrie :

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{33 \text{ m}}{3\,300 \text{ m/s}} = \frac{1}{100} \text{ s} \cdot$$

c) Frecvența se calculează din (5.9)

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{1}{100} \text{ s}} = 100 \text{ Hz} \cdot$$

Se observă din relațiile (5.15) și (5.16), ca și din descrierea procesului, că lungimea de undă este determinată de doi factori : *unul (perioada sau frecvența) care depinde de sursă și al doilea (viteza) care este legat de mediul în care se propagă unda, de proprietățile lui elastice* pentru că, în fond, viteza depinde de cuplaj.

Se dovedește teoretic și se verifică experimental că viteza v de propagare a unei unde transversale pe o coardă depinde de tensiu-

11 — c. 772 4

nea T la care este supusă coarda și de masa μ a unității de lungime a corzii prin relația

$$v_t = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{5.17}$$

expresie care include numai mărimi fizice proprii corzii.

Dacă oscilația pendulului sursă nu este întreținută, procesul de amortizare este extrem de rapid, energia sursei fiind transferată șirului de oscilatori, o parte disipîndu-se prin frecări. Unda se stinge.

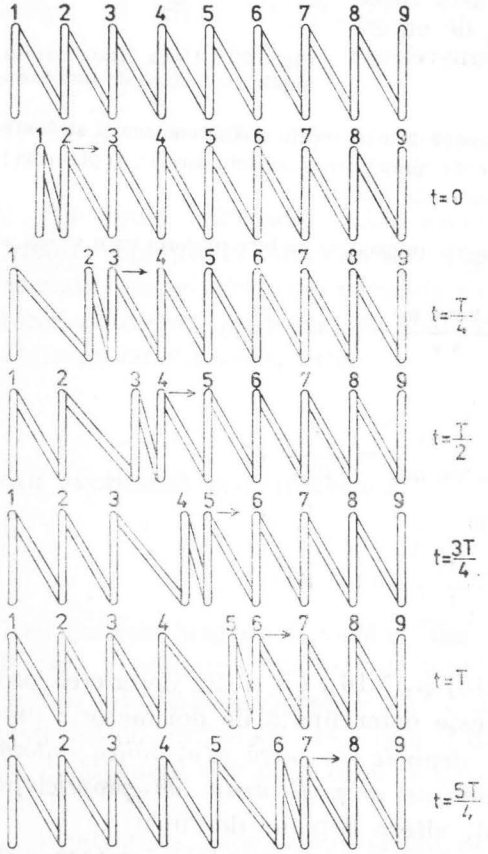


Fig. 5.31. Propagarea deformației longitudinale pe un resort lung spiralat.

Unde longitudinale. În figura 5.31 sus este desenat un resort de oțel, lung și spiralat, cu spirele în repaus echidistanțate. Putem considera resortul ca un șir de spire (oscilatori) cuplate elastic, fiecare spiră putînd oscila de-a lungul axei sale în jurul poziției de echilibru. La un capăt al resortului se scoate o spiră din poziția de echilibru, trăgînd-o și lăsînd-o apoi liberă. În felul acesta se produce o perturbație care se propagă spre celălalt capăt. Perturbația constă în punerea în mișcare a fiecărei spire, pe direcția de propagare. O astfel de undă se numește *longitudinală*.

După trecerea perturbației, datorită frecărilor cu aerul și mai ales datorită celor din interiorul spirelor, oscilația acestora se stinge rapid, resortul rămînînd în repaus. Presupunem că printr-un mijloc oarecare facem ca prima spiră din capăt să fie pusă în continuu în mișcare oscilatorie armonică.

În figura 5.31 este desenat resortul la momente diferite pentru a urmări procesul de deplasare a perturbației. Se observă că dacă pe resort se formează la momentul inițial ($t = 0$) o comprimare (spirele *1—2*) aceasta se deplasează mai departe, observînd-o la momentul $T/4$ la spirele 2—3, la momentul $T/2$ la spirele 3—4 etc. În timp ce comprimarea avansează spre dreapta, fiecare spiră pusă în mișcare de perturbație continuă să oscileze în jurul poziției de echilibru. Astfel, de exemplu, spira *1* face o oscilație între $t = 0$ și T cînd apare o nouă comprimare care se va propaga. Există spire care oscilează în concordanță de fază cum sînt spirele *1* și *5*, *2* și *6* (figura 3.9, momentul $t = 5T/4$.

Considerînd resortul construit din același material, propagarea perturbației se face uniform cu viteza v. În intervalul de timp (T) în care spira *1*, de exemplu, efectuează o oscilație, perturbația avansează pînă la spira *5* care va începe să oscileze în fază cu spira 1 (momentul $3T/4$). Distanța parcursă va fi egală cu vT. Întrucît toate spirele oscilează cu aceeași perioadă și deoarece propagarea se face cu aceeași viteză v, distanța dintre două spire consecutive care oscilează în fază este lungimea de undă și constituie ca și în cazul undelor transversale o caracteristică a undei longitudinale.

Pe toată lungimea resortului din figura 5.31 se formează regiuni în care spirele sînt mai apropiate și regiuni în care spirele sînt mai îndepărtate decît în stare neperturbată. Poziția acestor regiuni se modifică în timp, deplasîndu-se.

Unda longitudinală nu este polarizată.

Un exemplu de undă longitudinală într-un solid este propagarea perturbației unei lovituri dată cu un ciocan la capătul unei bare, pe direcția acesteia. Comprimarea barei prin lovitură este transmisă din aproape în aproape pînă la capătul celălalt. Acest lucru poate fi verificat dacă la capătul opus celui la care se produce perturbația se pune o bilă alăturată de bara fixată rigid. Bila va fi proiectată pe direcția barei în sensul propagării perturbației.

Viteza de propagare a unei unde longitudinale este dependentă de caracteristicile mediului. Se demonstrează teoretic și se verifică experimental că expresia vitezei v_1 a unei unde longitudinale este

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{5.18}$$

unde E este modulul de elasticitate, iar ρ densitatea substanței din care este alcătuit mediul.

Unde longitudinale într-o coloană de gaz. Presiunea coloanei de gaz aflată în tubul reprezentat în figura 5.32 este o mărime de stare a coloanei. Ne putem închipui întreaga coloană împărțită în straturi transversale subțiri. Presupunem că oscilația pistonului începe printr-o deplasare spre dreapta; stratul vecin este împins în același sens. Aerul fiind comprimat, presiunea crește față de valoarea inițială. Comprimarea se transmite stratului următor și din strat în strat mai departe. În mișcarea pistonului către stînga aerul din imediata lui apropiere se destinde, presiunea scade și ajunge sub valoarea inițială. Depresiunea creată determină mișcarea aerului din straturile adiacente, care se destind la rîndul lor. Pe figura 5.32 comprimarea și dilatarea straturilor a fost figurată prin varierea grosimilor lor. În timpul unei oscilații a pistonului, stratul vecin acestuia execută o mișcare oscilatorie de-a lungul direcției de propagare a perturbației. Această mișcare este reluată de toate straturile, dar cu o întîrziere de fază datorată timpului necesar propagării. Unda este longitudinală. Perioada oscilației fiecărui strat este aceeași cu perioada oscilației pistonului.

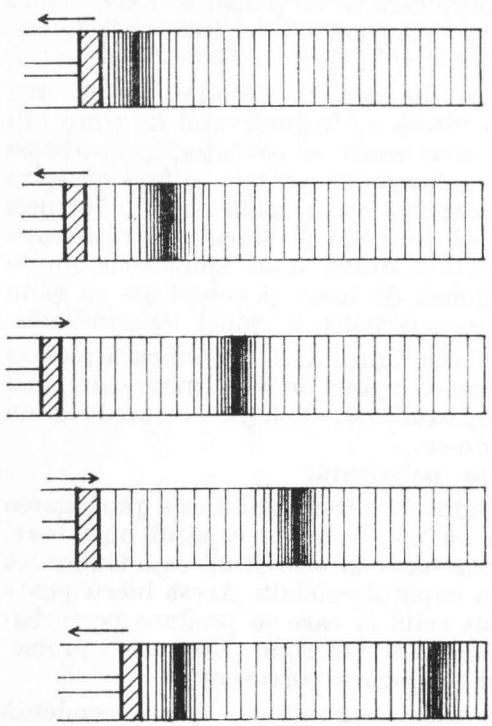


Fig. 5.32. Reprezentare schematică stratificată a unui gaz aflat într-un tub în care se propagă o undă.

Straturile imaginate fiind extrem de subțiri, putem considera că presiunea la un moment dat este aceeași în tot stratul. În timpul unei oscilații complete a unui strat, valoarea presiunii oscilează în jurul valorii inițiale. Unda poate fi considerată simultan o propagare a perturbației mecanice de mișcare a straturilor sau o propagare a variației presiunii în jurul unei valori de echilibru. De exemplu, în cazul celui mai puternic sunet pe care îl poate

suporta timpanul urechii omului amplitudinea variației presiunii atmosferice este $\pm 30 \frac{N}{m^2}$. Aceasta corespunde, pentru o frecvență de 1 000 Hz, la o deplasare maximă a straturilor de 10^{-3} cm. În cel mai slab sunet perceput, variația presiunii este de $\pm 2 \cdot 10^{-5} \frac{N}{m^2}$ cu o deplasare, la 1 000 Hz, de amplitudine egală cu 10^{-9}cm. Ținînd seama de faptul că presiunea atmosferică normală este de $10^5 \frac{N}{m^2}$ ne dăm seama de marea sensibilitate a urechii omului.

Exemple 1. La capătul unei ramuri a unui diapazon așezat vertical cu ramurile în jos, se leagă un fir de lungime $l = 2$ m și de masă $m_1 = 12$ g. De acest fir se suspendă un corp cu masa $m1 = 960$ g. Diapazonul oscilează. Să se calculeze : *a*) viteza de propagare a undelor în fir ; *b*) frecvența diapazonului dacă lungimea de undă este de 40 cm ; *c*) cum se modifică viteza de propagare dacă se dublează masa corpului suspendat.

Rezolvare. a) În fir se propagă unde transversale. Viteza undelor este conform relației (5.17) și neglijînd efectul masei firului asupra tensiunii din fir,

$$v_t = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{m \cdot g}{\frac{m_1}{l}}} = \sqrt{\frac{960 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 2\ \text{m}}{12 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}}} \approx 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) Fiecare punct de pe undă oscilează forțat, sursa fiind diapazonul. Conform relației (5.16)

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{40 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{40 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = 10^2\ \text{s}^{-1} = 10^2\ \text{Hz}.$$

c) masa corpului suspendat fiind m', viteza v'_t este

$$v'_t = \sqrt{\frac{T'}{\mu}}.$$

Raportul vitezelor este :

$$\frac{v'_t}{v_t} = \sqrt{\frac{T'}{T}} = \sqrt{\frac{m'}{m}} = \sqrt{2}.$$

2. Un muncitor de la calea ferată lovește cu ciocanul capătul unei șine producînd o undă longitudinală. Sunetul este auzit după 0,20 s de un al doilea muncitor care ascultă cu urechea pe șină. Ce distanță există între cei doi muncitori ? Șina este din oțel cu densitatea 7 800 kg/m³ și cu modulul de elasticitate de $20 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Rezolvare. Distanța poate fi calculată dacă se cunoaște viteza v_1 de deplasare a perturbației. Conform relației (5.18),

$$v_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 10^{10}\ \mathrm{N/m^2}}{7\,800\ \mathrm{kg/m^3}}} = 5{,}06 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m/s};$$

de aici

$$d = v_1 t = 5{,}06 \cdot 10^{3}\ \mathrm{m/s} \cdot 20 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{s} = 1\,013\ \mathrm{m}.$$

5.2.3. Unde superficiale

Descriem formarea și propagarea perturbațiilor la suprafața apei în două cazuri: 1) cînd procesul se desfășoară în largul mărilor și oceanelor, adică în zone în care adîncimea este mare și 2) cînd undele sînt generate la suprafața unei ape puțin adînci.

1) În afara cazurilor în care valurile sînt cauzate de mișcări seismice, undele pe suprafețele mărilor și oceanelor sînt determinate de acțiunea vîntului. Aerul care se deplasează antrenează fiecare picătură de apă de la suprafață, imprimîndu-i o mișcare circulară, în sensul mișcării vîntului (fig. 5.33). Raza traiectoriei este egală

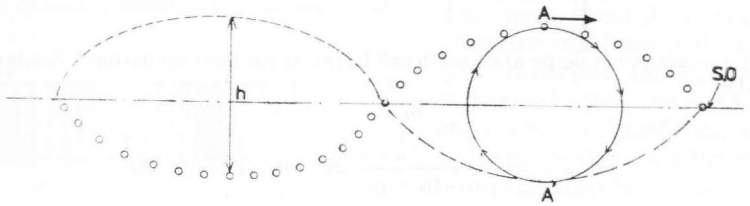


Fig. 5.33. Mișcarea unei picături A la suprafața apei în timp de o perioadă. Linia punctată arată aspectul valului cînd A este pe o creastă, iar linia întreruptă aspectul undei cînd A este într-o vale (A').

chiar cu înălțimea valului. Mișcarea fiecărei picături se poate descompune într-o mișcare oscilatorie pe verticală și una pe orizontală; încît, în intervalul de timp T în care picătura efectuează o rotație completă începînd din A de pe creasta valului, suprafața apei din acel punct coboară pe distanța h în prima jumătate de perioadă, ajungînd să fie la baza valului (A') și urcă în cea de-a doua jumătate de perioadă cu h redevenind creasta valului. Astfel, în decursul unei perioade, picătura oscilează sus-jos și înainte-înapoi rămînînd aproximativ în același punct. Forța de revenire este în acest caz aproape exclusiv forța gravitațională. O dovadă a realității

mișcărilor descrise este faptul că pe creasta unui val, apa, în mișcare spre înainte, dă o componentă orizontală care îl împinge pe înotător în același sens. Dimpotrivă, mișcarea apei de la baza unui val dă o componentă în sens contrar care se opune înaintării înotătorului, trăgîndu-l înapoi. Aceste fapte le-a observat oricine a înotat în apa mării la aproximativ 30—40 m de mal. Înotătorii experimentați folosesc procesele descrise pentru a se apropia de mal cu eforturi mai mici.

De-a lungul direcției de deplasare a valului suprafața apei este la un moment dat alcătuită din picături de apă, toate aflate în mișcare circulară, dar în faze diferite (fig. 5.34). Undele de larg au

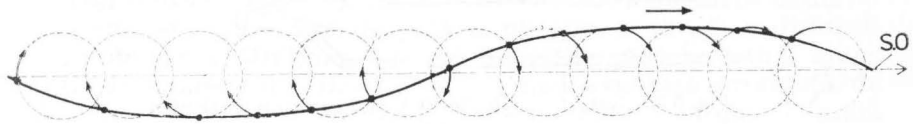


Fig. 5.34. La un moment dat, toate picăturile se află într-o mișcare circulară, dar în faze diferite. Aceasta este „fotografia" valului la un moment dat.

lungimi de undă mari. Aspectul suprafeței mării sau oceanului într-un loc se explică prin compunerea a nenumărate unde de amplitudini, faze și direcții diferite.

2) În cazul undei create pe suprafața apei dintr-un bazin sau o cuvă, mecanismul de producere este diferit, forța de revenire fiind aproape exclusiv datorată tensiunii superficiale (fig. 5.35). Stratul superficial se comportă ca o membrană elastică.

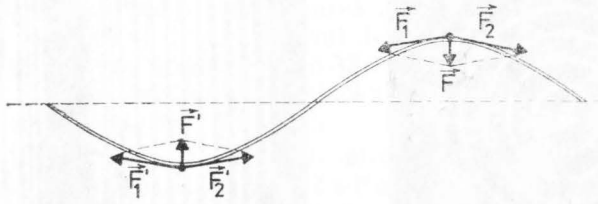


Fig. 5.35. Forța de revenire în cazul unei ape puțin adînci este aproape exclusiv datorită tensiunii superficiale.

Cu ajutorul aparatului din figura 5.36, numit aparat de studiat, unde, se pot produce și studia procesele de propagare a undelor superficiale de acest fel. Printr-un vibrator, se produce perturbarea stratu-

lui superficial de apă din cuva C (care are o adîncime de 2—3 cm). Perturbația se propagă sub forma unei unde de lungime de undă

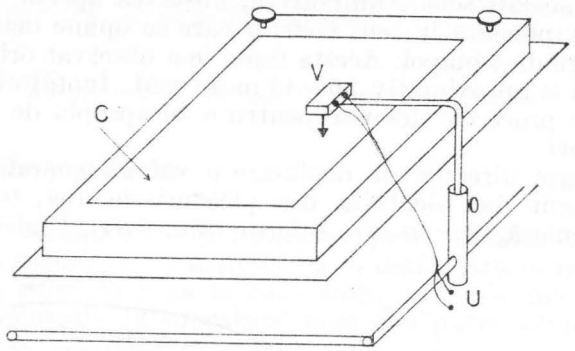


Fig. 5.36. Cuva C și vibratorul V al aparatului de studiat unde.

scurtă, de ordinul centimetrilor. În figura 5.37, a a se observă o undă cu creste și văi circulare produsă de o sursă punctiformă, iar în figura 5.37, b, este fotografiată o undă cu creste și văi liniare produsă de o sursă de forma unei vergele.

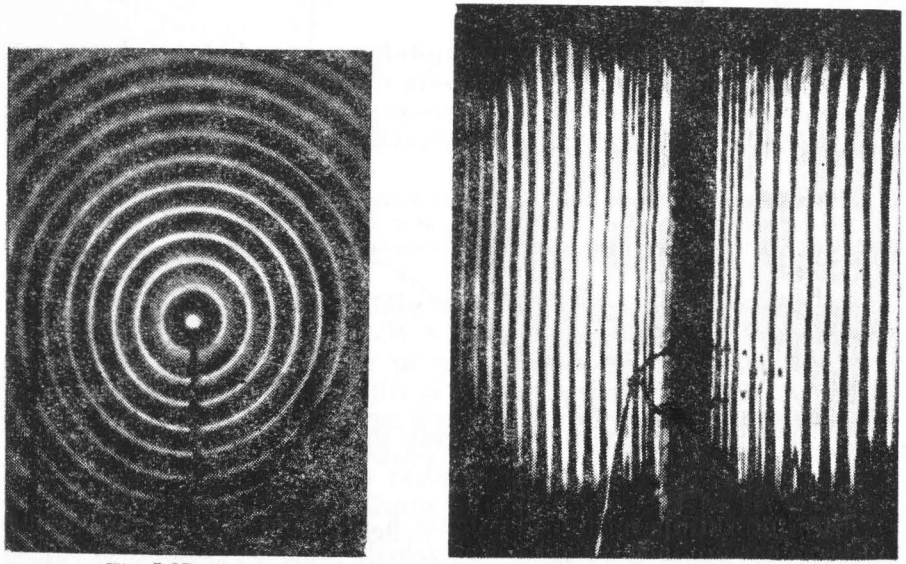


Fig. 5.37. Unde circulare (a) și liniare (b) în cuva din figura 5.36.

Suprafața lichidului poate fi considerată ca o membrană elastică pe care se propagă unde transversale de la izvorul care deformează stratul superficial într-un loc de pe suprafața apei.

5.2.4. Suprafața de undă. Principiul lui Huygens

Considerăm o sursă de oscilații armonice care produce o undă într-un mediu material elastic. Unda se propagă în toate direcțiile punînd pe rînd în oscilație particulele materiale ale mediului. Mulțimea punctelor care oscilează în fază, alcătuiește o suprafață de undă. Există o infinitate de suprafețe de undă. O suprafață de undă are în general o formă oarecare. La un moment dat t mișcarea oscilatorie a ajuns pe fiecare direcție pînă la un punct aflat la o distanță oarecare de sursă. Mulțimea tuturor punctelor pînă la care a ajuns oscilația la momentul t alcătuiește cea mai avansată suprafață de undă care se numește *front undă*. Toate punctele frontului de undă încep să oscileze în același moment.

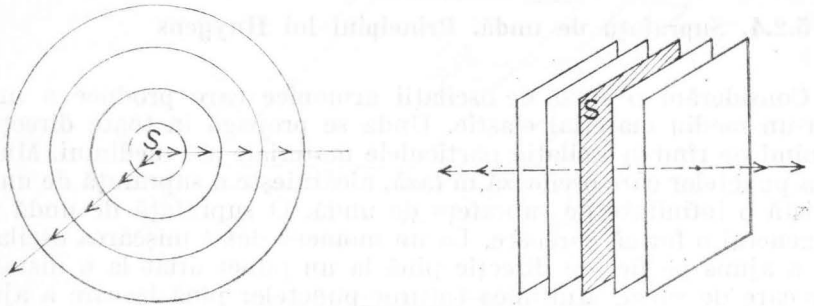
Forma suprafețelor de undă depinde atît de proprietățile mediului, cît și de aspectul sursei. În cele ce urmează vom considera mai întîi că unda se propagă într-un mediu omogen și izotrop. Omogenitatea cu privire la o mărime fizică constă în însușirea mediului de a avea pentru mărimea fizică respectivă aceeași valoare în fiecare punct. Viteza undei pe o direcție oarecare într-un mediu omogen este constantă (E, T aceleași în tot mediul). Prin izotropia mediului, cu privire la o anumită proprietate, se înțelege faptul că proprietatea considerată se manifestă în același fel pe orice direcție. Referindu-ne la propagare, rezultă că modulul vitezei undei într-un mediu omogen și izotrop este constant pe orice direcție.

În acest caz particular, dacă sursa este punctiformă sau sferică, suprafețele de undă și deci și frontul de undă sînt sfere concentrice, iar undele se numesc sferice (fig. 5.38, a). Dacă sursa este o suprafață plană, suprafețele de undă și deci și frontul de undă sînt plane, iar unda este plană (fig. 5.38, b).

O dreaptă perpendiculară pe frontul de undă se numește rază. Raza este o dreaptă de propagare. Pe figura 5.38 sînt desenate cîteva raze, sensul de propagare fiind marcat cu săgeți.

La depărtare mare de sursă o undă sferică poate fi considerată într-un domeniu restrîns ca o undă plană deoarece suprafața unei sfere de rază mare poate fi asimilată pe porțiuni nu prea mari cu o suprafață plană (de exemplu, o suprafață de arie nu prea mare din suprafața Pămîntului).

Construcția suprafețelor de undă se poate face cu ajutorul principiului Huygens care rezultă dintr-o generalizare a faptelor experimentale. Descriem două experimente efectuate cu unde superficiale, care conduc la acest principiu.



a b

Fig. 5.38. O undă sferică (a) și una plană (b) ; S este sursa.

1) O cuvă este despărțită în două compartimente printr-un perete în care s-a lăsat o fantă îngustă (fig. 3.17, a). În compartimentul din stînga se produc unde circulare. Cînd frontul de undă ajunge la deschizătură, unda se propagă mai departe în al doilea compartiment prin unde, de asemenea, circulare, care au aspectul undelor provenite dintr-o sursă punctiformă situat chiar în fantă.

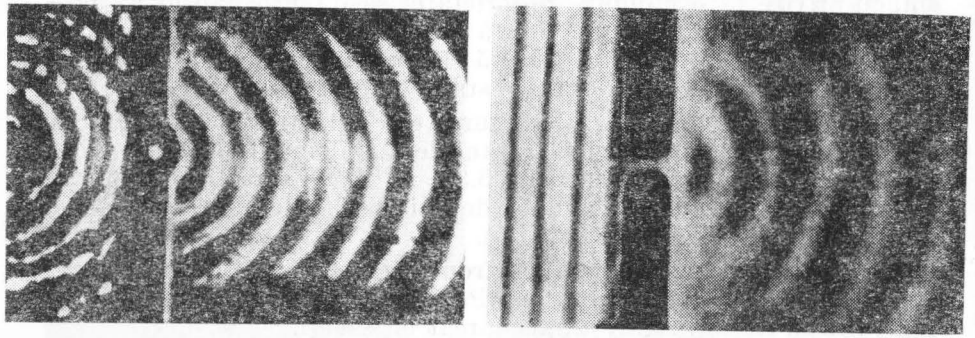


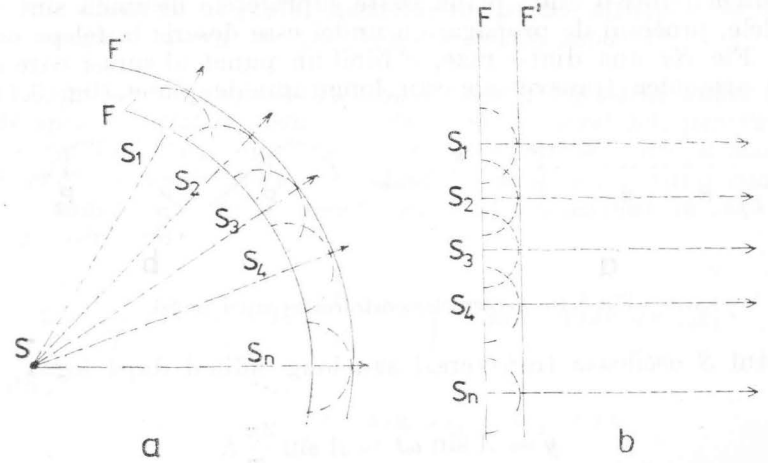
Fig. 5.39. Difracția undelor circulare (*a*) și a celor liniare (*b*)

2) De la vibratorul în formă de bară se propagă spre fantă unde liniare. După ce frontul de undă ajunge la perete, în compartimentul din dreapta apar unde circulare provenite din deschizătură (fig. 5.39, *b*).

Fenomenul reprezentat în figura 5.39, de ocolire a obstacolelor de către unde, este cunoscut sub numele de *difracție*.

Oricare ar fi forma undelor din compartimentul din stînga, aspectul undelor dincolo de fantă este același. Aceste unde se numesc *unde secundare*. Extinzînd rezultatul pentru unde spațiale de orice formă, ajungem la principiul lui Huygens: *orice punct de pe o suprafață de undă poate fi considerat ca un nou centru de perturbații de la care se propagă unde secundare.*

Cu ajutorul acestui principiu se poate construi orice nou front de undă pornind de la frontul de undă anterior și folosind undele secundare. În figura 5.40 este arătată metoda geometrică de construc-



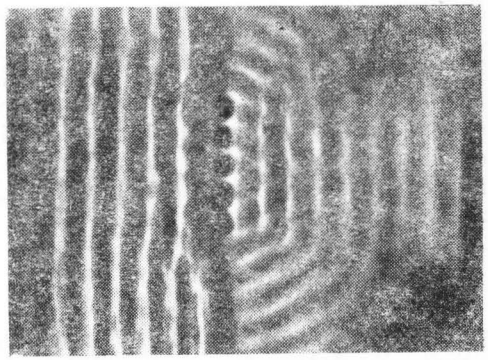


Fig. 5.40. Construcția fronturilor de undă cu ajutorul principiului lui Huygens :

a) unde circulare; *b)* unde liniară; *c)* ilustrarea experimentală a construcției în cazul *b)*.

ție a frontului de undă circular și liniar pentru un mediu omogen și izotrop rezultată din aplicarea principiului lui Huygens. De la

sursele elementare S_1, S_2,...,S_n, care oscilează în fază, pornesc unde secundare circulare ale căror fronturi sînt figurate. Suprafața tangentă la un moment dat tuturor acestor fronturi elementare este compusă din puncte aflate în concordanță de fază, deci ele sînt pe o suprafață de undă care, fiind cea mai avansată, este noul front de undă. În figura 5.40, c este fotografiat procesul descris în figura 5.40, b.

5.2.5. Ecuația undei plane

Întrucît într-o undă plană toate suprafețele de undă sînt plane paralele, procesul de propagare a undei este descris la fel pe oricare rază. Fie Sx una dintre raze, S fiind un punct al sursei care emite unde armonice transversale sau longitudinale plane (fig. 5.41, *a*).

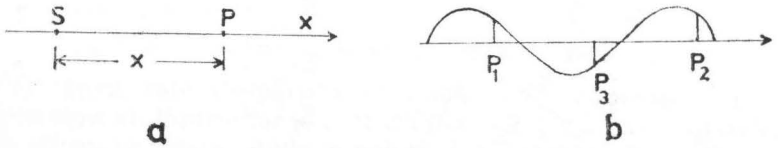


Fig. 5.41. Pentru demonstrarea ecuației undei.

Punctul S oscilează transversal sau longitudinal după legea

$$y = A \sin \omega t = A \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

După un interval de timp Δt frontul de undă plană care se propagă cu viteza de fază v în mediul elastic omogen și izotrop, ajunge în punctul P aflat la distanța x de S. P este excitat într-o mișcare oscilatorie armonică, avînd aceeași perioadă și amplitudine cu oscilația lui S, dar cu o întîrziere de fază față de S. La momentul t, la care punctul S al sursei are elongația dată mai sus, punctul P are elongația

$$y_p = A \sin \frac{2\pi}{T} (t - \Delta t)$$

pe care a avut-o S cu Δt secunde înainte de momentul t. Dar

$$\Delta t = \frac{x}{v}$$

astfel că

$$y_p = A \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right).$$

sau înlocuind $\lambda = v T$ obținem

$$y_p = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right). \qquad (5.19)$$

Această funcție, numită impropriu ecuația undei, exprimă legea de mișcare a oricărui punct material de pe semidreapta Sx și, ca atare, descrie procesul de propagare în două aspecte:

1) *Exprimă elongația la un moment dat t a oricărui punct de pe semidreapta Sx aflat la distanța x de sursă.* În acest fel, pentru un t dat, expresia (5.19) dă imaginea spațială a punctelor de pe raza Sx. Se observă o caracteristică, *periodicitatea spațială*. Scriind condiția ca la momentul t două puncte P_1 și P_2 să oscileze în fază (fig. 5.41, b), obținem:

$$2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{P_1}}{\lambda} \right) = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{P_2}}{\lambda} \right) + 2k\pi, \text{ unde } k \in \{\mathbb{Z}\}.$$

Rezultă:

$$x_{P_2} = x_{P_1} + k\lambda \text{ sau } x_{P_2} - x_{P_1} = k\lambda$$

adică punctele aflate în concordanță de se află la diferențe de drum egale cu un multiplu întreg al lungimii de undă.

Condiția ca punctele de pe direcția de propagare să oscileze în opoziție de fază este ca (fig. 5.41, b)

$$2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{P_1}}{\lambda} \right) = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{P_2}}{\lambda} \right) + (2k + 1)\,\pi$$

sau

$$x_{P_2} - x_{P_1} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$$

condiție realizată de punctele pentru care diferențele de drum sînt un multiplu impar de $\frac{\lambda}{2}$.

2) *Pentru un punct dat (un x dat) funcția (5.19) dă legea lui de mișcare.*

Exemplu. O sursă de unde plane oscilează după relația

$$y = 3 \cdot 10^{-1} \sin \frac{\pi}{9} t \cdot$$

Dacă viteza v de propagare a undelor este de 2 m/s: a) să se scrie ecuația undei; b) să se afle diferența de fază între oscilațiile particulelor M și N aflate la distanța de 3 m, respectiv 4 m de sursă.

Rezolvare. a) Ecuația undei este relația (5.19)

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Comparînd legea de oscilație a sursei cu forma generală (1.3) observăm că

$\omega = \frac{\pi}{9} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, de unde $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{9}} = 18$ (s) ceea ce permite calcularea lungimii de undă:

$$\lambda = vT = 2 \text{ m/s} \cdot 18 \text{ s} = 36 \text{ m}.$$

Cu acestea ecuația undei este:

$$y = 3 \cdot 10^{-1} \sin 2\pi \left(\frac{t}{18} - \frac{x}{36} \right)$$

sau

$$y = 3 \cdot 10^{-1} \sin \pi \left(\frac{t}{9} - \frac{x}{18} \right).$$

b) Punctele M și N oscilează după legile

$$y_M = 3 \cdot 10^{-1} \sin\pi \left(\frac{t}{9} - \frac{3}{18} \right); \quad y_N = 3 \cdot 10^{-1} \sin\pi \left(\frac{t}{9} - \frac{4}{18} \right).$$

Diferența de fază între M și N fiind

$$\pi \left(\frac{t}{9} - \frac{3}{18} \right) - \pi \left(\frac{t}{9} - \frac{4}{18} \right) = \frac{\pi}{18} \text{ rad} \cdot$$

5.2.6. Energia transferată în procesul de propagare

În cele ce urmează vom considera că sursa de oscilații funcționează în regim permanent, adică transferă continuu în mediul înconjurător, omogen și izotrop, aceeași energie în unitatea de timp (are o putere constantă).

Dacă E este energia emisă în timpul t de totalitatea punctelor care compun sursa, raportul

$$P = \frac{E}{t} = \Phi \tag{5.20}$$

definește *puterea emisă de sursă* sau *fluxul de energie emis*. Fluxul de energie se măsoară în wați.

Dăm un exemplu pentru a aprecia ordinul de mărime al fluxului de energie al unei surse. Un om, vorbind normal, emite un flux de 10^{-5}W, iar dacă strigă emite un flux de $3 \cdot 10^{-2}$W. Dacă toți oamenii dintr-un oraș ca Bucureștiul ar vorbi simultan, puterea emisă, considerînd populația capitalei noastre de 2 000 000 locuitori, ar fi de $2 \cdot 10^6 \cdot 10^{-5}$ W = 20 W, putere necesară pentru funcționarea a două becuri de pom de iarnă!

Energia emisă de sursă se transferă în întreg mediul. Puterea transferată printr-o suprafață oarecare așezată la o anumită depărtare de sursă descrie procesul de transfer energetic prin acea suprafață. Puterea transferată poartă, în acest caz, același nume — de flux de energie prin acea suprafață. Cîtul dintre fluxul de energie P și aria A a suprafeței perpendiculare pe direcția de propagare prin care este transferată energia

$$I = \frac{P}{A} \tag{5.21}$$

definește densitatea de flux de energie, sau intensitatea I, măsurată în watt/m^2. Intensitatea minimă necesară perceperii unui sunet este de 10^{-12}W/m^2. Raportate la această intensitate, în tabelul următor sînt date cîteva intensități relative:

Pragul de audibilitate	1	
Respirația normală	10	
Conversația normală	10^6	
Traficul unui bulevard	10^7	
Aspiratorul de praf	10^8	
Avion clasic la decolare	10^{12}	Senzație dureroasă și, începînd cu 10^{13}, periculoasă
Avion cu reacție la decolare	10^{15}	
Racheta la lansare	10^{17}	

Întrucît energia transferată printr-o porțiune a unei suprafețe de undă este o însumare a energiei tuturor oscilatorilor de pe această

suprafață de undă, rezultă ținînd seama de (5.12) că densitatea de energie este direct proporțională cu pătratul amplitudinii oscilatorilor de pe această porțiune.

$$I \sim A^2. \qquad (5.22)$$

Vom analiza modul cum se face transferul energetic în două cazuri.

1) *Unda plană.* Dat fiind faptul că unda este plană, considerăm suprafața plană S, conținînd surse care oscilează toate permanent, în fază, cu aceeași frecvență și amplitudine (fig. 5.42).

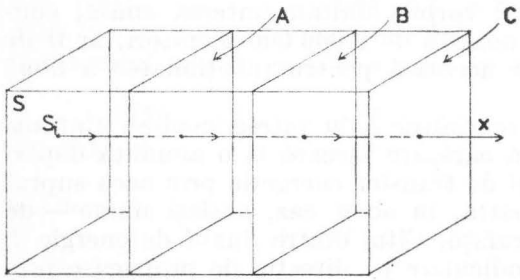


Fig. 5.42. Intensitatea undei plane este aceeași pe suprafețele A, B, C.

Pe o dreaptă perpendiculară pe frontul de undă oscilația este determinată de oscilatorul corespunzător din planul sursei. Sursa este deci alcătuită din mulțimea tuturor acestor surse elementare punctiforme. Fie S_{ix} o rază care pornește din sursa elementară S_i unul din oscilatorii componenți ai sursei care oscilează armonic și care își păstrează constantă energia (relația (5.12))

$$E_i = 2\pi^2 m A^2 \nu^2.$$

Sursa transferă continuu energie șirului de oscilatori de pe semidreapta S_{ix}, primind în schimb energie de la un alt sistem. Întrucît mediul este considerat nedisipativ și omogen, fiecare oscilator din șir are aceeași amplitudine ca S_i. Amplitudinea tuturor oscilatorilor de-a lungul lui S_{ix} este egală. Aceasta justifică reprezentarea undei ca în figura 5.43, în care toate punctele, care la momentul reprezentării și-au atins amplitudinea, au amplitudini a egale. Acest proces se produce identic pe oricare din dreptele de propagare S_i— Dacă energia sursei ar fi mai mare și amplitudinea fiecărui oscilator de pe direcția S_{ix} ar fi mai mare.

În cazul undei plane, transferul energetic se face numai pe direcția perpendiculară pe sursă, într-un paralelipiped drept cu baza în planul sursei. Din aceste motive intensitatea $I = P/A$ este aceeași

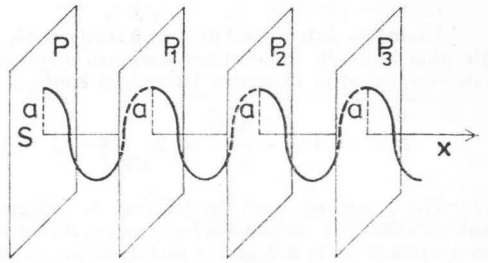


Fig. 5.43. În cazul ideal, amplitudinea oscilatorilor de pe diferite suprafețe de undă este aceeași în cazul undei plane.

pe suprafețele A, B, C, de arie A perpendiculare pe raza S_{ix} (fig. 5.42).

2) *Unda sferică.* Sursa punctiformă transferă energie în toate direcțiile. Mediul fiind omogen și izotrop, suprafețele de undă sînt sfere cu centrul în sursă (fig. 5.44). Fluxul de energie, constant, emis

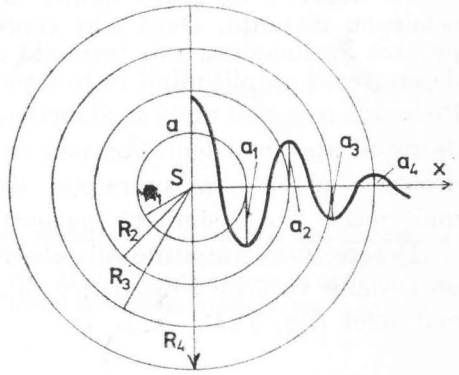


Fig. 5.44. Amplitudinea oscilatorilor de pe o rază a unei unde sferice descrește cu distanța.

de sursă, este transmis prin suprafețe de rază din ce în ce mai mare. Astfel, chiar într-un mediu nedisipativ, densitatea de energie este la distanțe mai mari din ce în ce mai mică. Să considerăm două sfere de raze R_1 și R_2 ($R_2 > R_1$) și fie P fluxul de energie emis de sursă. Intensitățile vor fi

$$I_1 = \frac{P}{4\pi R_1^2} \text{ și } I_2 = \frac{P}{4\pi R_2^2}, \text{ deci } I_1 > I_2.$$

Sau, făcînd raportul lor

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2}. \qquad (5.23)$$

Exemplu. Într-o sală de formă semisferică, avînd raza de 20 m, pentru o bună audiție pînă la pereți se consideră necesară o intensitate de 10^{-6} W/m². Pentru aceasta, un conferențiar aflat în centru trebuie să emită o putere

$$P = I \cdot A = \frac{I \cdot 4r^2\pi}{2} = 2\pi r^2 I = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} = 25{,}12 \cdot 10^{-4}\text{W}$$

adică de 2,5ori mai mult decît fluxul de energie emis într-o conversație normală. Dacă sala ar avea raza de două ori mai mare, intensitatea la marginea ei ar fi de patru ori mai mică și ar fi necesară o instalație de amplificare.

Ținînd seama de relația (5.22) $I \sim A^2$, egalitatea (5.23) se poate scrie

$$\frac{A_1^2}{A_2^2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \quad \text{sau} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{R_2}{R_1}. \qquad (5.24)$$

Se observă că amplitudinea oscilațiilor de-a lungul unei raze scade cu distanța. Dacă s-ar reprezenta la un moment dat unda, pe raza Sx imaginea s-ar prezenta ca în figura 5.44 unde se observă descreșterea amplitudinii în funcție de distanță, după relația (5.24). Pe o rază oarecare unda se amortizează cu distanța, la început destul de rapid apoi mai lent. Această constatare nu trebuie să ne mire, deoarece cu cît raza suprafeței de undă e mai mare, cu atît mai mult poate fi ea asimilată, pe porțiuni mici, cu un plan.

Descreșterea amplitudinii este vizibilă la undele de pe suprafața apei, unde valurile concentrice mai îndepărtate de sursă au creste mai mici (fig. 5.24).

5.2.7. Propagarea undelor la suprafața de separație dintre două medii omogene

În paragrafele precedente s-a studiat propagarea unei perturbații într-un mediu omogen. În următoarele două paragrafe se cercetează procesul de propagare în locuri de discontinuitate, adică în locuri în care proprietățile mediului se schimbă brusc.

Reflexia și transmiterea unei perturbații pe un fir. În figura 5.45 este prezentată — la momente diferite — o perturbație care se propagă într-un mediu alcătuit din două corzi: una subțire, iar alta groasă înnodate în N. Producem o oscilație transversală la capătul S din stînga (fig. 5.45, a). Perturbația se propagă de la sursa S spre dreapta pînă la nod, de unde o perturbație se deplasează înapoi spre stînga, iar alta se transmite în continuare spre dreapta.

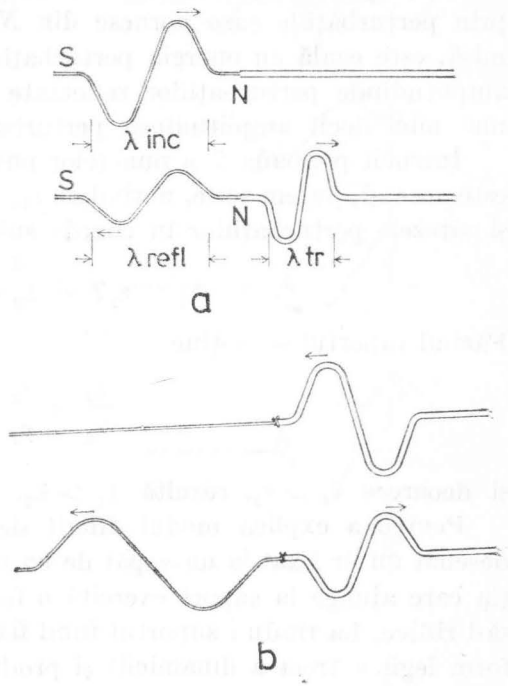


Fig. 5.45. a) Reflexia și transmisia unei perturbații pe un fir la trecerea printr-un punct de discontinuitate a densității. b) Același proces în cazul în care sensul de propagare este invers.

Întoarcerea perturbației în mediul în care s-a propagat la întîlnirea unui alt mediu se numește *reflexie*.

Perturbația care avansează de la sursa S spre punctul N se numește *incidentă*, iar cea care se deplasează de la nodul N spre sursă se numește *reflectată*.

Ne fixăm atenția asupra acestui proces observînd: amplitudinile, lungimile de undă și aspectul perturbației incidente, reflectate și transmise.
Se constată că:

— *amplitudinea* undei reflectate sau a celei transmise este mai mică decît amplitudinea undei incidente;

— *lungimea de undă* a perturbației reflectate este egală cu lungimea de undă a perturbației incidente; lungimea de undă a perturbației transmise este mai mică decît ale acestora;

— perturbația incidentă care avansează cu o buclă în sus se întoarce cu o buclă în jos (fig. 5.46, b).

Ce explicație dăm celor observate?

Perturbația incidentă pune în oscilație nodul N care constituie o sursă de oscilație pentru punctele ambelor medii. Exceptînd pierderile, și aplicînd legea conservării energiei, suma energiilor transmise prin perturbațiile care pornesc din N, cea reflectată și cea transmisă, este egală cu energia perturbației incidente. Din acest motiv amplitudinile perturbațiilor reflectate sau ale celor transmise sînt mai mici decît amplitudinea perturbației incidente.

Întrucît perioada T a punctelor puse în oscilație în ambele medii este aceeași, putem scrie, notînd cu λ_1, v_1 și λ_2, v_2 lungimile de undă și vitezele perturbațiilor în coarda subțire, respectiv coarda groasă

$$\lambda_1 = v_1 T \text{ și } \lambda_2 = v_2 T.$$

Făcînd raportul se obține

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

și deoarece $v_1 > v_2$, rezultă $\lambda_1 > \lambda_2$.

Pentru a explica modul diferit de reflexie, în figura 5.46 este desenat un fir fixat la un capăt de un suport perfect rigid. Perturbația care ajunge la suport exercită o forță asupra acestuia încercînd să-l ridice. La rîndu-i suportul fiind fix exercită o forță opusă (conform legii a treia a dinamicii) și produce o perturbație în jos care începe să se propage înapoi. Semnalul venit cu o buclă în sus se întoarce cu o buclă în jos. Un punct oarecare A la care ajunge frontul undei reflectate își începe mișcarea într-un sens contrar sensului în care a început să se miște cînd a fost atins de frontul undei incidente (momentele a și f). Se spune că reflexia pe suportul perfect rigid s-a făcut cu o schimbare de fază de π radiani (180°).

În figura 5.47 este desenată aceeași coardă prinsă de o mică culisă putînd aluneca fără frecare pe o vergea. Unda avansează în același mod ca în figura 5.46. Cînd perturbația ajunge la culisă, aceasta este ridicată fără restricții într-o mișcare oscilatorie, ceea ce produce o perturbație de același tip, care se propagă ca undă reflectată începînd cu o buclă în sus, ca și unda incidentă. Oricare

punct A își începe oscilația în același sens cînd frontul incident sau reflectat a ajuns în acel loc (momentele a și f).

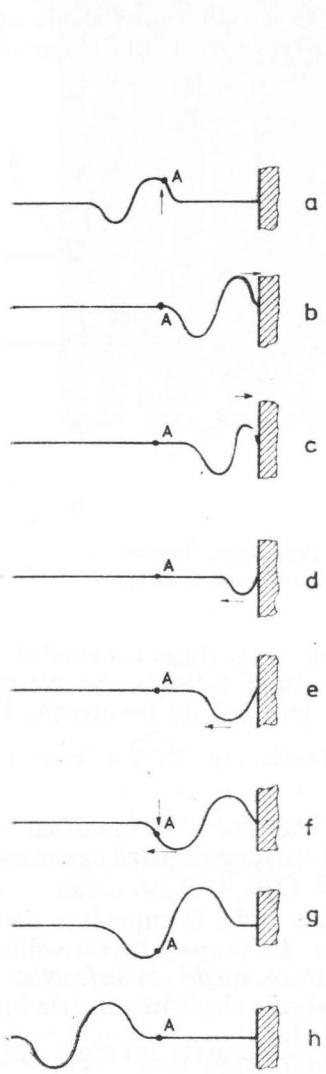


Fig. 5.46. Reflexia pe un perete perfect rigid.

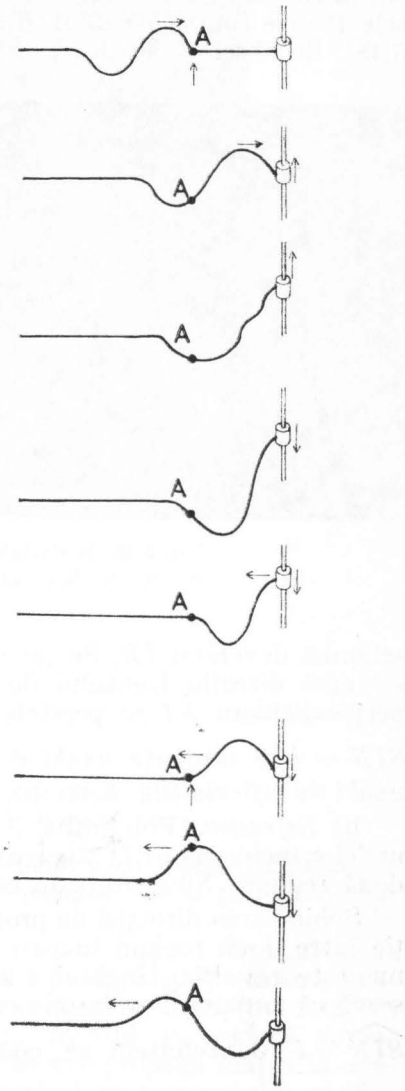


Fig. 5.47. Reflexia pe un mediu perfect mobil.

Reflexia și refracția undelor. a) *Reflexia.* Punînd un obstacol în calea undelor se obține fenomenul de reflexie, undele emise de sursă, revenind în mediul în care s-au propagat la incidența cu peretele P care constituie un mediu cu alte caracteristici decît apa (fig. 5.48). Se observă că direcția de propagare SI a undei incidente se

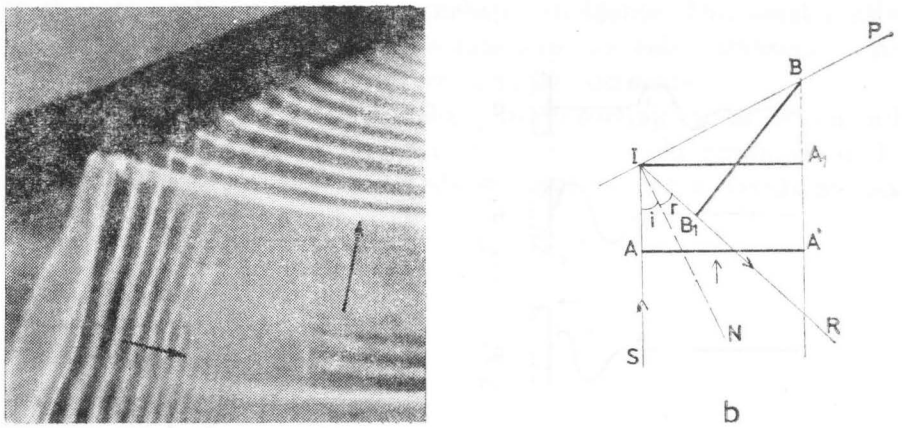


Fig. 5.48. Reflexia undelor superficiale liniare :
a) fotografie; b) schema corespunzătoare situației din a).

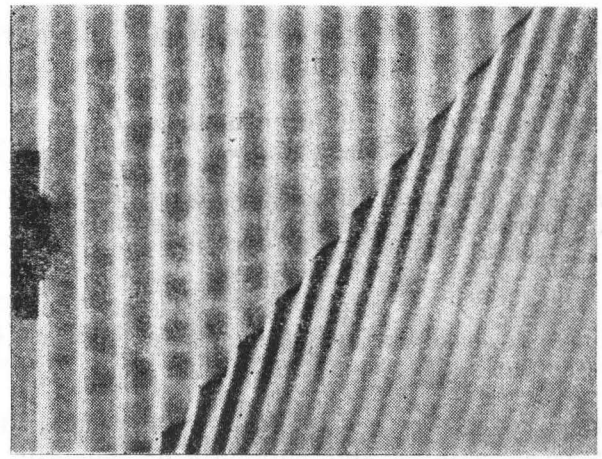
schimbă devenind IR. Se poate studia experimental modul cum se schimbă direcția frontului de undă după reflexie. Se construiește perpendiculara NI pe peretele P în punctul de incidență. Unghiul $SIN = i$ se numește *unghi de incidență*, iar $\widehat{NIR} = r$ se numește *unghi de reflexie* (fig. 5.48, b).

b) *Refracția.* Fotografia 5.49, arată cum se modifică direcția undelor incidente SI la trecerea liniei care marchează separarea celor două regiuni. Noua direcție este IR (fig. 5.49 *a*).

Schimbarea direcției de propagare a undei la suprafața de separație între două regiuni în care viteza de propagare este diferită se numește *refracție.* Unghiul r se numește *unghi de refracție.* Se observă că unghiul de refracție este mai mic decît unghiul de incidență $\widehat{SIN} = i$. Concomitent se constată micșorarea lungimii de undă.

Observație. Cele două fenomene, reflexia și refracția, se produc simultan. Acest fapt poate fi observat privind cu multă atenție

figura 5.49,b, a pe care în mediul undei incidente se observă, mai slab și suprafețele undei reflectate.



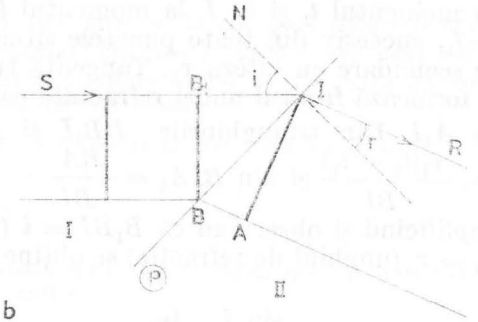


Fig. 5.49. Refracția undelor superficiale liniare :
a) fotografie; b) schema corespunzătoare situației din a).

Legile reflexiei și refracției. Vom demonstra legile reflexiei și refracției pentru cazul undei plane pornind de la principiul lui Huygens.

a) *Legea reflexiei.* Considerăm o porțiune a frontului de undă plan AA' care avansează cu viteza v pe direcția SI către suprafața de separație P, pe care o atinge la un moment dat t_1 (fig. 5.48, b). În acest moment din locul în care frontul va atinge suprafața P vor porni unde secundare, care se vor propaga înapoi în același mediu. În intervalul de timp, începînd cu momentul t_1 și sfîrșind cu t_2 în care ultimele puncte ale frontului IA_1 au luat con-

tact cu peretele, undele secundare produse succesiv de toate punctele dintre I și B se propagă de la perete înapoi în mediul din care au venit.

Suprafața tangentă fronturilor de undă ale tuturor acestor unde secundare formează noul front de undă B_1B care se deplasează pe direcția IR.

Se observă că triunghiurile dreptunghice IA_1B și BB_1I sînt egale avînd IB comună, iar $A_1B = IB_1 = v(t_2 - t_1)$. Rezultă $\widehat{A_1IB} = \widehat{B_1BI}$ sau observînd că $\widehat{A_1IB} = i$, iar $\widehat{B_1BI} = r$, se obține egalitatea unghiurilor de reflexie și de incidență:

$$i = r. \tag{5.25}$$

Este tocmai ceea ce se constată experimental pe figura 5.48,a măsurînd aceste unghiuri.

b) *Legea refracției.* Porțiunea BB_1 a frontului incident avansează cu viteza v_1 pe direcția SI spre suprafața de separație P, pe care o atinge în B la momentul t_1 și în I la momentul t_2 (fig. 5.49, b). În intervalul $t_2 - t_1$, succesiv din toate punctele situate între B și I se propagă unde secundare cu viteza v_2. Tangenta tuturor fronturilor acestor unde formează frontul undei refractate care la momentul t_2 ocupă poziția A_1I. Din triunghiurile BB_1I și BAI calculăm $\sin B_1BI = \dfrac{B_1I}{BI} = \dfrac{v_1(t_2 - t_1)}{BI}$ și $\sin BIA_1 = \dfrac{BA}{BI} = \dfrac{v_2(t_2 - t_1)}{BI}$. Făcînd raportul, simplificînd și observînd că $B_1BI = i$ (unghiul de incidență), iar $BIA_1 = r$ (unghiul de refracție) se obține legea refracției

$$n_{21} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} \tag{5.26}$$

unde n_{21} se numește indice de refracție al mediului *2* față de *1*. Direcția de propagare se apropie de normală dacă $v_2 < v_1$ și se depărtează de ea dacă $v_2 > v_1$. Să observăm că folosind relația între lungimea de undă, viteză și perioadă, legea (5.26) se scrie:

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \tag{5.27}$$

Observăm că relațiile (5.26) și (5.27) sînt identice (a se vedea exemplul de calcul următor).

Dacă unda trece din mediul II în mediul I și dacă $v_2 < v_1$ există o valoare i_l a unghiului de incidență pentru care avem $\sin r = \sin \dfrac{\pi}{2} = 1$ (fig. 5.50). În acest caz relația (5.26) se scrie:

$$n_{12} = \frac{\sin i_l}{1} = \frac{v_2}{v_1},$$

iar i_l se numește *unghi limită*. Dacă $i \geqslant i_l$ toată energia undei incidente trece în unda reflectată; nu există refracție. Fenomenul se numește *reflexie totală*.

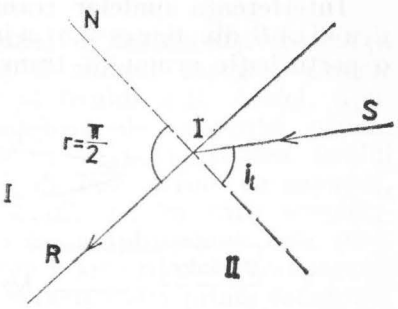


Fig. 5.50. Reflexia totală.

Exemplu. Undele produse într-o cuvă cu apă trec dintr-o regiune mai puțin adîncă în una mai adîncă și se refractă. Unghiul de incidență este de 19°, iar cel de refracție este de 30°.

a) Care este raportul vitezelor în cele două regiuni (medii)?

b) Care este raportul lungimilor de undă în cele două medii?

c) Sub ce unghi de incidență trebuie trimise undele din mediul mai puțin adînc pentru ca să aibă loc reflexia totală?

Rezolvare. a) Refracția se face după legea (5.26)

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}$$

sau, înlocuind cu datele din enunț și notînd cu v_P și v_A vitezele în regiunea puțin adîncă respectiv adîncă, se obține

$$\frac{\sin 19°}{\sin 30°} = \frac{v_P}{v_A} = \frac{2}{3}.$$

b) Folosind (5.27) se obține raportul dintre lungimile de undă în regiunile puțin adîncă și adîncă

$$\frac{v_P}{v_A} = \frac{\lambda_P}{\lambda_A} = \frac{2}{3}.$$

c) Condiția de reflexie totală este

$$\frac{\sin i_l}{\sin 90°} = \frac{2}{3} \text{ de unde } \alpha = 42°,$$

unghiul i_l fiind unghi limită.

5.2.8. Interferența undelor

Interferența undelor transmise pe un fir elastic. De-a lungul firului AB din figura 5.51,a începe la un moment dat să se propage o perturbație armonică transversală provocată de oscilația aerului

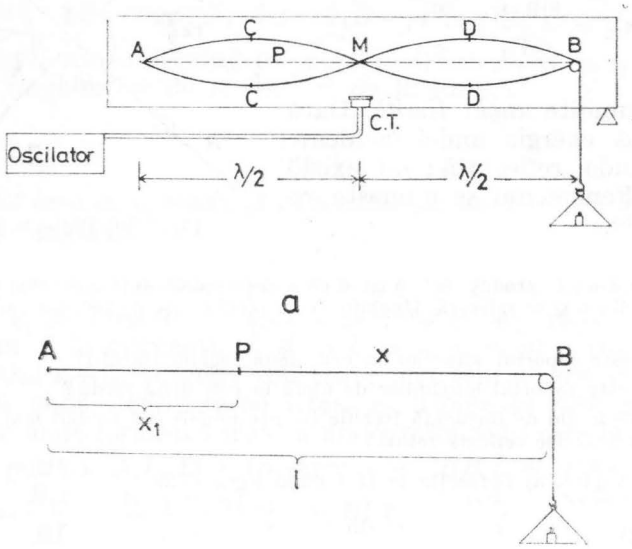


Fig. 5.51. Unde staționare pe un fir : *a)* aparatul ; *b)* desen pentru demonstrație cantitativă.

datorită lamei capsulei telefonice CT. Frontul de undă ajuns la capătul B se reflectă întorcîndu-se către A. La fel, cea ajunsă în A se întoarce către B.

Două unde se suprapun în fiecare punct Aceste unde au într-un punct aceeași frecvență și diferența de fază constantă în timp. Prima afirmație este evidentă, deoarece cele două unde provin de la aceeași sursă. A doua afirmație trebuie demonstrată.

Pînă în punctul P, o undă considerată a veni din A și cea reflectată, în B, care se suprapun la momentul t, au parcurs drumul $AP = x_1$ și, respectiv, $AB + BP = x_2$ (fig. 5.51, b). Diferența de drum este

$$x_2 - x_1 = AP + PB + BP - AP = 2PB = 2x.$$

x fiind distanța PB. La această diferență de drum trebuie adăugată o jumătate de lungime de undă, echivalentă schimbării de fază cu

π, pe care o introduce reflexia în punctul B (vezi § 5.2.7). Întrucît diferența de drum nu depinde de timp, ci numai de punctul considerat, diferența de fază corespunzătoare diferenței de drum $2x + \lambda/2$ este constantă în timp.

Două unde care sosesc într-un punct avînd aceeași frecvență și diferența de fază constantă în timp se numesc *coerente*. Undele sînt, așadar, coerente în orice punct al firului AB. Astfel, aparatul din figura 5.51,*a* realizează condiția de coerență pentru orice punct. Experimental se observă că toată lungi-mea firului AB se împarte într-un număr întreg de fuse avînd, *de exemplu*, aspectul din figura 5.51a, cu punctele (C, D) în care amplitudinea e maximă și punctul (M) în care amplitudinea este zero. Punctul A are o mișcare de amplitudine foarte mică în comparație cu punctele C și D. El este un *nod*. În punctele din prima categorie, numite *ventre* undele coerente sosesc în concordanță de fază, iar în punctele din a doua categorie, numite noduri, undele sosesc în opoziție de fază.

Imaginea undei staționare prezentată în figura 5.51,a este rezultatul suprapunerii pe retină a mai multor imagini ale firului care se succed cu viteză. În realitate, firul arată la intervale de un sfert de perioadă ca în figura 5.52.

Calculăm elongația punctului P aflat la distanța x_1 de A. Dacă A oscilează după legea $y = A \sin 2\pi\,(t/T)$ ecuația undei care vine din A este, conform relației (5.19),

$$y_i = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right). \qquad (5.28)$$

Ecuația undei reflectate în B este, conform aceleiași relații (5.19), în care se înlocuiește x_1 cu $1 + x + \frac{\lambda}{2}$:

$$y_r = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l + x + \frac{\lambda}{2}}{\lambda} \right). \qquad (5.29)$$

Întrucît atît unda din A cît și cea din B sînt polarizate în același plan, P este supus la o mișcare rezultantă compusă din două

oscilații paralele (5.28) și (5.29). Elongația y a mișcării este

$$y = y_i + y_r = \underbrace{2A \cos 2\pi \frac{2x + \frac{\lambda}{2}}{2\lambda}}_{\text{amplitudinea}} \underbrace{\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2l + \frac{\lambda}{2}}{2\lambda} \right)}_{\text{faza}}$$

Întrucît x este variabil această relație dă : a) configurația firului la un moment dat t, prin variația lui x ($0 \leqslant x \leqslant l$) și b) mișcarea unui punct oarecare (pentru un x dat). Aceasta este ecuația unei unde de un alt tip decît *unda progresivă* prin care se transferă energia sursei de la punct la altul și în care fiecare punct oscilează cu aceeași amplitudine. În acest nou tip de undă, numit *undă staționară* amplitudinea fiecărui punct variază în funcție de poziția lui pe fir. Punctele pentru care amplitudinea este maximă sînt găsite prin condiția

$$2\pi \frac{2x + \frac{\lambda}{2}}{2\lambda} = k\pi$$

de unde

$$4x + \lambda = 2k\lambda \text{ sau } x_{max} = (2k - 1)\frac{\lambda}{4}, \ (k = 1, 2, \ldots).$$

Toate punctele situate la distanță egală cu un număr impar de sferturi de lungime de undă de capătul din dreapta oscilînd cu amplitudine maximă, sînt ventre. Pentru ca amplitudinea să fie zero este necesar ca

$$2\pi \frac{2x + \frac{\lambda}{2}}{2\lambda} = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$$

$$2x + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1)\frac{\lambda}{2} \ ; \ 2x = 2k\frac{\lambda}{2},$$

$x_{min} = k\frac{\lambda}{2}$, unde $k = 0, 1, 2, \ldots$, deoarece punctul B este tot un nod.

Toate punctele care sînt situate la o distanță egală cu un număr întreg de semilungimi de undă începînd cu capătul din dreapta nu oscilează, deci sînt noduri.

Distanța dintre un nod și un ventru este

$$x_{min} - x_{max} = k\frac{\lambda}{2} - (2k - 1)\frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4}.$$

Modificînd tensiunea din fir prin adăugarea sau ridicarea de pe platan a unor corpuri suplimentare, se poate varia numărul umflăturilor (fig. 5.53) Această schimbare se explică prin faptul că modificînd tensiunea în fir se schimbă viteza de propagare conform relației $v_l = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ și, în consecință, lungimea de undă, care se calculează după relația $\lambda = v_l T$. Astfel, mărind tensiunea, viteza crește și lungimea de undă crește. Cum întreaga lungime a firului trebuie să fie un număr întreg de semilungimi de undă, numărul de umflături scade cînd tensiunea crește. Într-o undă staționară energia sursei nu se mai transferă, dovadă fiind existența nodurilor care nu oscilează. Energia fiecărui punct se schimbă din energia cinetică în energia potențială, dar pe ansamblul firului energia rămîne aceeași. Acest lucru este ilustrat pe figura 5.52. La momentul inițial, cînd

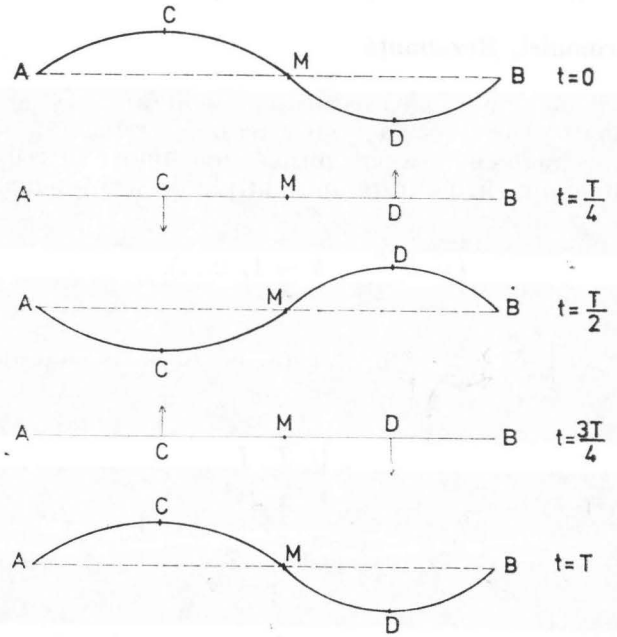


Fig. 5.52. Aspectul firului din figura 5.51, la intervale de timp egale cu $T/4$.

punctele C și D, care sînt ventre, își ating amplitudinea, energia pe coardă este exclusiv potențială. Punctele C și D încep să se întoarcă către pozițiile de echilibru. După un sfert de perioadă C și D se află în pozițiile lor de echilibru, mișcîndu-se în sensul săgeților. Energia corzii este exclusiv cinetică, coarda nefiind deformată. După încă un sfert de perioadă coarda e deformată la maximum, C și D atingîndu-și amplitudinea în poziții simetrice față de cele ocupate la $t = 0$. Energia corzii este numai potențială. La momentul $t = 3T/4$, C și D, revenite în poziția de echilibru, au viteza maximă ca de altfel toate punctele corzii. Energia sistemului este exclusiv cinetică, coarda nefiind deformată. După încă un sfert de perioadă, se încheie ciclul transformărilor, situația redevenind identică aceleia din momentul inițial.

În absența pierderilor energia se conservă, firul fiind un sistem care poate oscila după ce a fost excitat de sistemul exterior (capsula telefonică). În realitate, sistemul disipă o parte din energia primită în procesul de excitare, funcționarea vibratorului fiind necesară tocmai pentru suplimentarea energiei disipate prin frecări. În caz contrar unda se amortizează repede și dispare.

5.2.9. Armonici. Rezonanță

Pe firul de lungime l al aparatului din figura 5.53 se formează unde staționare. Deoarece la ambele capete trebuie să fie noduri, întregul fir se fragmentează sub forma unui număr întreg de umflături, adică lungimea firului este un multiplu de semilungimi de undă. Deci :

$$l = k\frac{\lambda}{2}, \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{5.30}$$

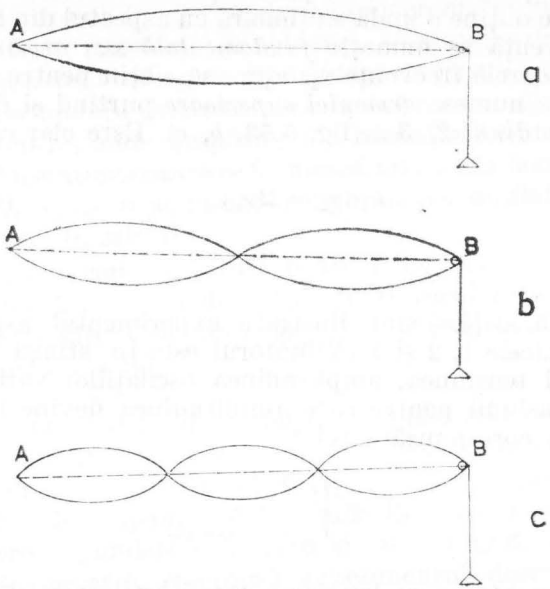
Dar $\lambda = \frac{v_t}{\nu} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \cdot \frac{l}{\nu}$. Cu aceasta, condiția de mai sus se scrie

$$l = k\sqrt{\frac{T}{\mu}}\frac{l}{2\nu}$$

sau

$$\nu_{pr} = k\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\mu}}. \tag{5.31}$$

Deci firul are un șir de frecvențe proprii care se obțin punînd $k = 1, 2, \ldots$



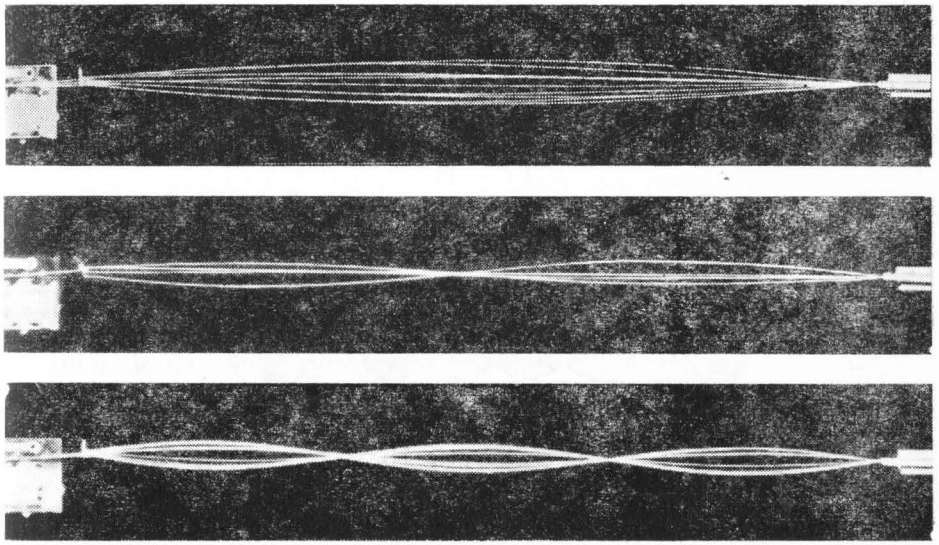


Fig. 5.53. Aspectul firului din figura 5.51, pentru prima, a doua și a treia armonică (a, b, c) și fotografiile stroboscopice ale corzii excitată de un vibrator aflat în stînga.

Frecvența proprie cea mai joasă ν_1 a corzii este dată de $k = 1$. În acest caz se obține o undă staționară cu aspectul din figura 5.53, *a*. Această frecvență se numește *fundamentală* sau *armonică de ordinul 1*. Următoarele frecvențe ν_2, ν_3,... se obțin pentru valorile $k = 2, 3,...$ și se numesc *armonici superioare* purtînd și denumirile de *armonica de ordinul 2, 3...* (fig. 5.53, *b*, *c*). Este clar că

$$\nu_2 = 2\nu_1;$$

$$\nu_3 = 3\nu_1$$

În figura 5.53 (jos) sînt ilustrate experimental aspectele corzii pentru armonicele 1, 2 și 3 (Vibratorul este în stînga fotografiilor) Modificînd tensiunea, amplitudinea oscilațiilor variază, existînd valori ale tensiunii pentru care amplitudinea devine mare. Lungimea de undă corespunzătoare

$$\lambda = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \cdot \frac{1}{\nu_{vibrator}}$$

are valoarea pentru care lungimea corzii este un multiplu al semilungimii de undă, cu alte cuvinte frecvența proprie este egală cu una din valorile din șirul (5.31). În aceste situații energia primită de la vibrator este maximă; este deci un *fenomen de rezonanță*.

5.2.10. Unde staționare longitudinale

În tubul Kundt (fig. 5.54) se pot studia undele staționare formate prin reflexie într-o coloană de gaz. Răzătura de plută

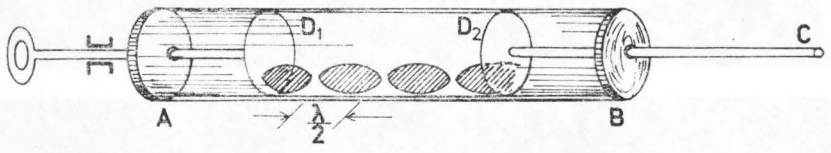


Fig. 5.54. Tubul Kundt.

din tub este o pulbere ușoară care se deplasează la mișcarea gazului cu care este în contact. Prin frecarea vergelei D_2C, se formează unde longitudinale. Vergeaua devine locul unor unde staționare cu

cîte un ventru la capete și un nod în mijlocul M, fixat. Discul D_2 transmite oscilația coloanei de gaz. Unda longitudinală se propagă și se reflectă pe discul D_1. Se produce interferența și, pentru o anumită lungime D_1D_2 (reglabilă) a coloanei, se staționarizează o undă formîndu-se un număr întreg de grămăjoare de forma arătată. Pulberea se strînge la noduri, deoarece acolo aerul nu se mișcă și este împrăștiată la ventre, unde amplitudinile oscilației straturilor de aer sînt maxime. La staționarizare se formează un număr întreg de grămăjoare. Lîngă D_1 apare o jumătate (nefigurată) cu umflătura alăturată discului, deoarece D_1 este fix.

Măsurînd cu o riglă distanța dintre două ventre se determină lungimea de undă în gazul din tub. Cu ajutorul tubului Kundt se poate determina viteza de propagare a undei longitudinale în aer sau într-un mediu solid.

a) *Determinarea vitezei de propagare a undei longitudinale într-un gaz*. Lungimea de undă a undei care se deplasează în coloana de gaz introdus în tub este $\lambda = vT$, unde λ, v și T sînt, respectiv, lungimea de undă, viteza de propagare și perioada. Perioada oscilației discului D_2 care generează undele este greu de determinat, însă se poate evita această operație, efectuînd experimentul descris pentru alt gaz pentru care se cunoaște viteza de propagare v_1. În acest caz $\lambda_1 = v_1T$, perioada fiind aceeași, deoarece nu se schimbă condițiile de producere a undelor în vergeaua D_2C. Rezultă prin împărțire

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{v}{v_1}$$

sau

$$v = \frac{\lambda}{\lambda_1} v_1,$$

lungimile de undă fiind măsurate așa cum s-a arătat.

b) *Determinarea vitezei v de propagare a undei longitudinale într-un solid*. Pentru unda staționară din bara D_2C, $D_2C = \frac{\lambda}{2}$, deoarece în D_2 și în C este cîte un ventru, iar în M un nod. Măsurînd d distanța dintre două noduri ale formației de grămăjoare de pulbere din tub

13 = c. 772 25

se determină lungimea de undă $\lambda_1 = 2d$ pentru unda staționară a cărei viteză v_1 o cunoaștem. Se poate scrie

$$\lambda_1 = v_1 T \text{ și } \lambda = vT$$

sau împărțind,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda} = \frac{v_1}{v} = \frac{2d}{2D_2C}$$

de unde se obține viteza v:

$$v = \frac{D_2C}{d} v_1.$$

În tabelul următor se dau vitezele de propagare ale undelor longitudinale și transversale în cîteva substanțe aflate la temperatură și presiune normală:

Substanța	Viteza (m/s)	Observații
Aer	332	
Apă	1460	
Oțel	5050	longitudinale
	3300	transversale
Plumb	1200	longitudinale
	700	transversale

Exemple 1. Un fir orizontal de 1,2 m lungime are o masă $m = 562 \cdot 10^{-6}$ kg. Una dintre ramurile unui diapazon așezat orizontal este prinsă la unul din capetele firului. Diapazonul are o frecvență de 100 Hz. Celălalt capăt al firului, trecut peste un scripete, susține un mic taler foarte ușor (fig. 5.51). Ce masă m_x trebuie să aibă corpul pus pe taler astfel încît pe fir să se formeze 4 ventre?

Rezolvare. Cu condiția pusă, lungimea firului este:

$$l = 4 \frac{\lambda}{2} = 2\lambda.$$

Viteza undei este conform relației

$$v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{Tl}{m}}$$

unde $\lambda = v_1/\nu$, iar $T = m_x g$. Înlocuind și făcînd operațiile se obține:

$$\nu^2\lambda^2 = \frac{m_x g l}{m}$$

sau

$$m_x = \frac{m\nu^2\lambda^2}{gl} = \frac{m\nu^2 l}{4g} = \frac{562 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot 10^4 (\text{Hz})^2 \, 1{,}2 \text{ m}}{4 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2} = 0{,}172 \text{kg}.$$

Să arătăm că efectuînd operațiile indicate cu unitățile de măsură se obține rezultatul în kilograme. Se știe că $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$. Deci

$$\frac{\text{kg} \cdot \text{Hz}^2 \cdot \text{m}}{\text{m/s}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} = \text{kg}$$

2. Într-o experiență cu tubul Kundt distanța între două noduri se găsește egală cu $6 \cdot 10^{-2}$ m. Care este viteza v a undelor în bara de alamă $D_2 C$ (fig. 5.54) dacă lungimea ei este de $60 \cdot 10^{-2}$m? Se ia viteza v_1 a undelor longitudinale în aerul din tub egală cu 340 m/s.

Rezolvare: Conform relației finale din §5.2.10, b se obține:

$$v = \frac{D_2C}{d} v_1 = \frac{60 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{6 \cdot 10^{-2} \text{ m}} 340 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3\,400 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

5.2.11. Sunetul

Noțiunea de sunet este înțeleasă în legătură cu senzația de auz a omului. Organul auditiv uman recepționează sub formă de sunet orice oscilație mecanică a cărei frecvență ν este inclusă în intervalul (20 Hz — 20 000 Hz). Dacă frecvența este inferioară limitei de 20 Hz sau superioară celei de 20 000 Hz oscilația se numește *infrasunet* și, respectiv, *ultrasunet*. Întrucît limitele de frecvență depind de mai mulți factori care le fac variabile, clasificarea are parțial un caracter de convenție.

Oscilația produsă într-un loc se propagă sub formă de undă sonoră în orice mediu: stînd cu capul în apă se poate auzi motorul unei bărci, punînd urechea la pămînt auzim trepidația traficului. Sunetul nu se propagă în vid. Unda sonoră este o undă mecanică longitudinală. Corpul care produce sunetul se numește *sursă sonoră*.

Toate procesele de propagare observate și studiate pentru undele mecanice în general, se observă și la undele sonore. În cele ce urmează vom studia cîteva probleme specifice legate de producerea, propagarea și perceperea undelor sonore.

Procese de propagare a undelor sonore. a) *Reflexia* se face după legea cunoscută (5.25). Un experiment simplu de reflexie este cel descris în figura 5.55.

Reflectarea sunetelor în aer liber pe obstacole de dimensiuni mari poate duce la formarea ecoului care constă în auzirea sunetului reflectat, distinct de cel emis de sursă. Condiția de realizare a ecoului este ca sunetul reflectat să sosească la urechea noastră la un interval mai mare de $t = 0{,}1$s, timp necesar formării a două senzații distincte. Deci (fig. 5.56, a) $2x = vt$ sau $x = \frac{vt}{2}$ și, înlocuind pe t cu

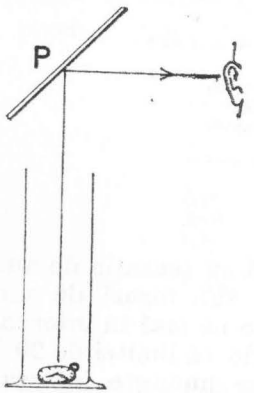


Fig. 5.55. Sunetul ceasornicului se reflectă pe placa P.

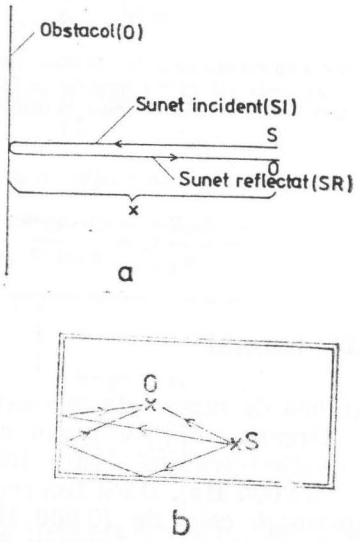


Fig. 5.56. Pentru calcularea condiției de ecou (a) și înțelegerea reverberației (b).

valoarea dată de condiția arătată, iar pe v cu 340 m/s, se obține $x = \frac{0{,}1 \cdot 340}{2} = 17$ m. Condiția se realizează pentru $x > 17$ m. Acest fenomen este observat de obicei în aer liber, dar și în mari spații închise cum sînt unele încăperi din peșteri sau din palate mari. Uneori ecoul este multiplu. În cazurile în care $x < 17$ m, sunetul recepționat direct este întărit de cel reflectat, acesta nemaifiind perceput distinct. Acest fenomen se produce mai ales în încăperi și se numește *reverberație*. Reverberația se măsoară prin timpul de reverberație, adică timpul în care se stinge un sunet de intensitate normală $10^{-5} - 10^{-6}$ W/m^2. Figura 5.56, b, ilustrează foarte schematic modul cum se produce reverberația.

Sunetul reflectat pe pereții încăperii sosește la observatorul 0 după perceperea sunetului direct provenit de la sursa S într-un interval mai mic de 0,1 s. Efectul este o prelungire a duratei lui. De obicei observatorul percepe în intervalul amintit mai multe sunete toate provenite de la aceeași sursă prin reflexii pe mai multe căi.

b) *Refracția*. În atmosferă, unde straturile de aer au temperaturi diferite și în care unda sonoră are viteze de propagare diferite, se produce o refracție continuă (fig. 5.57).

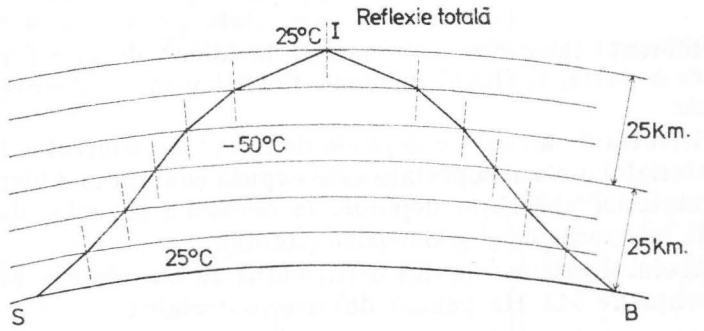


Fig. 5.57. Refracția sunetului în atmosferă.

Presupunem aerul stratificat în pături omogene. Cercetările au arătat că temperatura atmosferei este în scădere pînă la aproximativ 25 km și în urcare între 25 km și 50 km, așa cum arată figura 5.57. Unda sonoră pornită de la sursa S, se refractă apropiindu-se mereu de normală pînă la limita primilor 25 km; apoi se refractă îndepărtîndu-se de normala la suprafața de separație dintre două straturi adiacente cu temperaturi diferite, în care unda sonoră are viteze diferite. Fenomenul se repetă pînă cînd unghiul de incidență depășește unghiul limită și sunetul se reflectă total, înapoindu-se către sol. Pe acest drum refracția succesivă se produce la fel, dar în sens invers. Acest proces explică auzirea sunetelor la mari depărtări. Se relatează, de exemplu, că în timpul celui de-al doilea război mondial locuitorii Craiovei auzeau uneori exploziile bombardamentelor din București, la o distanță de 200 km, în timp ce în orașe mai apro-

piate cum sînt Giurgiu, Oltenița, Ploiești (50—60 km) nu se auzeau aceste explozii.

Tot refracția atmosferică a sunetului explică faptul că uneori vedem fulgerul, dar nu auzim sunetul.

c) *Absorbția sunetului.* La incidența undei sonore cu o suprafață energia undei produce comprimarea sau destinderea substanței. Energia primită la comprimarea materialului nu este cedată în întregime la relaxarea lui. O parte din energia incidentă este absorbită. Absorbția energiei este descrisă de un coeficient de absorbție acustică, definit prin raportul:

$$\alpha = \frac{\Phi_i - \Phi_r}{\Phi_i}$$

dintre diferența între fluxul de energie incidentă Φ_i și cel reflectat Φ_r, pe de o parte, și fluxul incident. Coeficientul de absorbție este un număr.

Coeficientul de absorbție depinde de frecvența sunetului incident și de materialul a cărui suprafață este expusă sunetului. Chiar pentru același material absorbția depinde, la aceeași frecvență, de caracteristicile lui mecanice și geometrice (formă).

În tabelul următor este dat coeficientul de absorbție a sunetului cu frecvența de 512 Hz pentru diferite materiale:

Materialul	Coeficientul de absorbție
Marmură	0,01
Sticlă	0,03
Perete tencuit cu var	0,06
Linoleum	0,06
Draperie de pluș aplicată pe perete	0,35
Vată minerală (10 cm grosime)	0,73
Vată de sticlă (10 cm grosime)	0,56
Mochetă	0,22

Materialele care au un coeficient de absorbție mare se numesc fonoabsorbante. Aceste materiale sînt utilizate în construcții pentru izolarea fonică (sonoră) a încăperilor, în săli de spectacol pentru a împiedica reflexia undelor care ar produce ecou sau reverberație

nepotrivită. Astfel, se explică utilizarea draperiilor în săli de spectacol sau a pereților capitonați cu vată minerală în construcția studiourilor de înregistrări, în care reverberația este desființată.

d) *Rezonanța sonoră.* Descriem două experimente în care se realizează fenomenul de rezonanță.

Coloana de aer din tubul A este excitată de oscilațiile unui diapazon (fig. 5.58). Undele longitudinale avansează către baza tubului și se reflectă pe suprafața liberă a lichidului. Lungimea l a coloanei poate fi variată prin ridicarea sau coborîrea vasului B, comunicant cu A. Pentru o anumită lungime l_r sunetul diapazonului este întărit. Coloana de aer este sediul unei unde sonore staționare, iar lungimea ei cea mai mică în condiția arătată realizează cerința de rezonanță pentru frecvența fundamentală. La gura tubului se formează un ventru, iar la suprafața lichidului un nod.

Pe baza acestui fenomen se realizează cutia de rezonanță la unele instrumente folosite în muzică. În figura 5.59 este desenat un diapa-

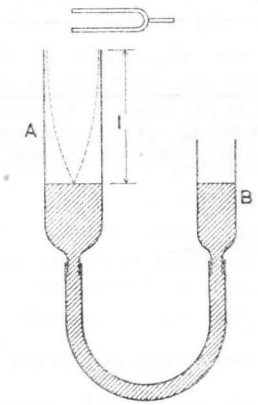


Fig. 5.58. Rezonanța sunetului.

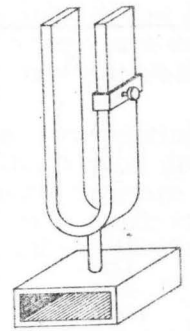


Fig. 5.59. Diapazonul.

zon de laborator. Cutia, deschisă la un capăt, pe care este fixat instrumentul delimitează o coloană de aer care intră în rezonanță pentru frecvența diapazonului care dă sunetul fundamental (frecvența poate fi puțin variată modificînd poziția inelului).

Proprietăți caracteristice ale unui sunet. Un sunet perceput de ureche are anumite proprietăți care, parțial se explică prin mărimile fizice caracteristice sunetului, parțial prin particularitățile

organului auditiv. Se disting trei proprietăți fizice : înălțimea, intensitatea și timbrul. Toate acestea pot fi exprimate în termeni fizici prin mărimi care permit caracterizarea unui sunet și pot fi reprezentate grafic printr-un spectru specific (vezi fig. 5.14).

a) *Înălțimea.* Senzația fiziologică de sunete ascuțite (*înalte*) și grave (*joase*) se datorește determinant frecvenței. În paragraful 5.2.9 s-a văzut că orice sunet emis este însoțit de sunete de frecvențe mai înalte. Vorbind despre înălțime se are în vedere numai frecvența fundamentală, adică sunetul numit pur.

În muzică sunetele sînt ordonate într-un șir (scară), criteriul fiind frecvența. Fiecare sunet are o denumire care îl situează într-un anumit loc în șir. Se începe cu sunetul cu frecvența de 16,5 Hz care se numește Do_{-1}, considerat ca limită inferioară a auzului uman și se stabilește un interval de o octavă care este apoi repetat. Prin interval se înțelege raportul între frecvențele a două sunete pentru care raportul este 2. Astfel, șirul (scara muzicală) apare ca în tabloul următor, unde sînt trecute intervalele celor 10 octave :

Nota	Frecvența (Hz)	Observații
Do_{-1}	16,5	Limita inferioară de jos a auzului omului
(La_{-1})	(27)	Sunetul cel mai profund al pianului
Do_0	33	
Do_1	66	
Do_2	132	
Do_3	264	Claviatura pianului
Do_4	529	
Do_5	1056	
Do_6	2112	
Do_7	4224	
Do_8	8448	Sunetul cel mai ascuțit al pianului
Do_9	16896	

În cadrul unei octave împărțirea în intervale este foarte diversificată, dar începînd cu Johann Sebastian Bach* s-a introdus gama temperată, care împarte orice octavă în 12 intervale egale, denumite semitonuri, definite prin raportul frecvențelor între două sunete alăturate egal cu 1,05946. Astăzi, considerarea acestei subdiviziuni

* Johann Sebastian Bach (1685—1750), compozitor german, unul dintre cei mai mari creatori din istoria muzicii.

ordonate a condus la posibilitatea descrierii matematice a formelor și teoriei muzicale.

b) *Intensitatea auditivă.* Senzația fiziologică de intensitate a sunetului se măsoară prin intensitatea auditivă (tăria sunetului). Auzul nu dă pentru două sunete diferite senzații în același raport de tărie ca raportul intensităților lor sonore.

Dacă se ia ca intensitate de referință I_0, intensitatea unui sunet abia perceptibil ($I_0 = 10^{-12}\mathrm{W/m^2}$) atunci se definește I nivelul de intensitate sonoră al unui sunet de intensitate I prin relația

$$L = \lg \frac{I}{I_0}. \tag{5.32}$$

Nivelul de intensitate sonoră se măsoară în belli (B)*.

Dar nivelul sonor, care este definit prin măsurarea unor mărimi fizice (I și I_0) nu poate fi utilizat pentru descrierea senzației de sunet, deoarece două sunete de același nivel nu produc aceleași senzații auditive dacă au frecvențe diferite. De exemplu, dintre două sunete avînd amîndouă nivelul de 0,4 belli, unul cu frecvența de 50 Hz iar altul cu frecvența de 1 000 Hz primul nu dă nici o senzație de sunet, iar al doilea este bine perceput.

Pentru a lua în considerare senzația, se ia ca referință un sunet fundamental cu frecvența egală cu 1 000 Hz. Nivelul de intensitate auditivă (de tărie) al unui sunet de o frecvență oarecare este nivelul intensității sonore al unui sunet cu frecvența egală cu 1 000 Hz care este apreciat de un auz normal ca avînd aceeași tărie cu sunetul analizat.

c) *Timbrul.* Un sunet emis are un caracter complex. Alături de sunete fundamentale sînt emise simultan și cîteva din armonicele lui ; toate acestea sînt numite componentele sunetului.

Un sunet poate fi reprezentat complet printr-un spectru (vezi fig. 5.14, *b*). Într-o diagramă în care pe orizontală sînt trecute frecvențele, iar pe ordonată este pus nivelul de intensitate sonoră componentele sînt notate prin bare situate în dreptul frecvențelor corespunzătoare. Aceste bare au lungimea proporțională cu nivelul de

* În onoarea lui Alexander Graham Bell (1847—1922), inginer american, inventatorul telefonului.

istensitate sonoră. În figura 5.60, a), sînt arătate aspectele a două nunete de aceeași frecvență a componentei fundamentale $\nu = 440$ Hz emise de două instrumente diferite. Diferența grafică este evidentă. Urechea exersată are posibilitatea de a distinge cele două sunete. Chiar un nespecialist poate distinge între două sunete de aceeași înălțime emise de instrumente diferite.

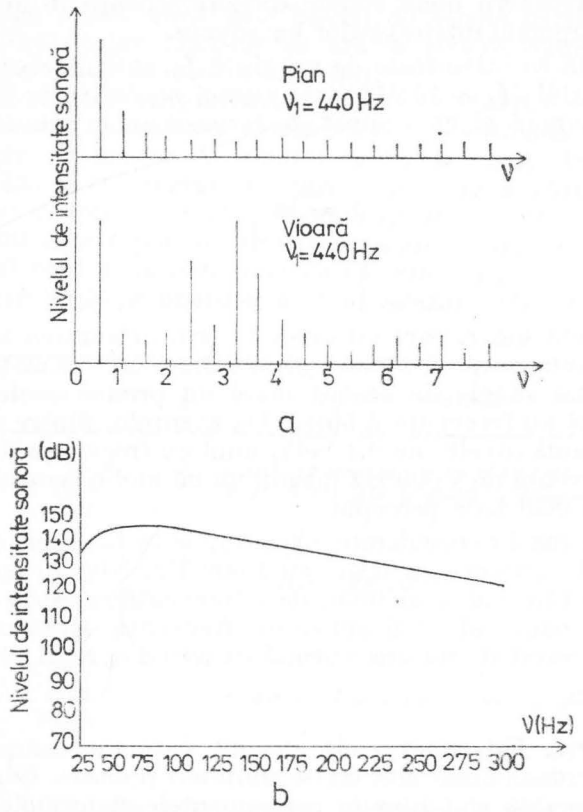


Fig. 5.60. Spectre ale notei de 440 Hz emisă de pian și de vioară (a). Spectrul unui zgomot (b).

Caracteristica unui sunet care se exprimă prin componentele și nivelul lor de intensitate sonoră se numește *timbru*.

Zgomotul este un sunet complex cu atît de numeroase componente și cu intervale atît de mici încît spectrul lui apare continuu avînd o bandă de frecvență largă (fig. 5.60, b).

Surse sonore. Există un mare număr de corpuri care pot oscila cu frecvențe din domeniul sonor și care generează unde sonore. Toate aceste corpuri sînt surse sonore. În cele ce urmează ne referim pe scurt la cîteva categorii de surse sonore care au importanță în construcția instrumentelor muzicale.

a) *Lame sonore.* Lama elastică din figura 5.61 este fixată la unul din capete. Scoasă din poziția de echilibru, lama poate oscila sau longitudinal sau transversal. Vom considera oscilația transversală, fiind mai des utilizată.

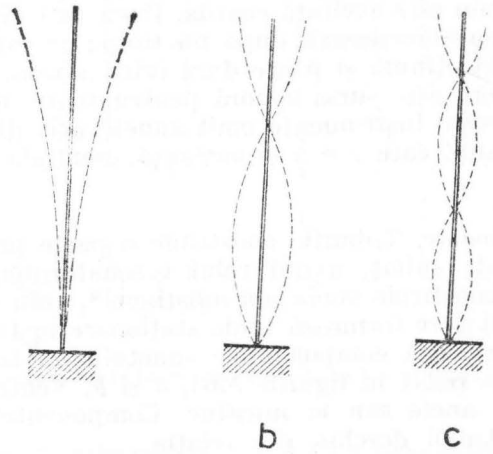


Fig. 5.61. Primele trei armonici ale unei lame.

Unda se reflectă la capătul prins și se formează o undă staționară care poate avea pentru primele trei frecvențe aspectul redat în figura 5.61. În fig. 5.61, *a* frecvența fiind cea mai mică, sunetul emis este fundamental. Studiul teoretic și experimental arată că în cazul lamelor frecvențele superioare nu sînt multipli întregi ai frecvenței sunetului fundamental.

Un exemplu de undă staționară într-o astfel de lamă este unda diapazonului, prezentat în figura 5.59, care poate fi considerat ca fiind alcătuit din două bare încastrate la bază. Lovit ușor, diapozitivul oscilează, formîndu-se unde staționare. Partea mediană a diapazonului oscilează transmițînd mișcarea piciorului care este fixat în cutia de rezonanță. Din sunetele transmise cutiei numai cel fundamental este întărit cu ajutorul cutiei de rezonanță. Sunetul emis de diapazon este difuzat pe două căi : prin contactul între brațele lui și aerul înconjurător, sau indirect, prin cutia de rezonanță.

Lamele sonore sînt utilizate la construirea anciei (fig. 5.62) care este sursă sonoră pentru clarinet, oboi, saxofon și armonica de gură.

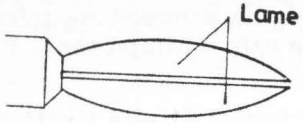


Fig. 5.62. O ancie cu două lame.

b) *Coarde sonore.* Coarda poate fi pusă în oscilație în mod diferit, atît longitudinal, cît și transversal. Frecvențele componentelor pot fi găsite cu ajutorul relației (5.31). Timbrul unui sunet depinde mult de felul cum este excitată coarda. Dacă este ciupită sau lovită sunetul corzii se amortizează după un timp; frecată cu un arcuș, oscilația este întreținută și poate dura oricît dorim.

Coarda sonoră este sursa sonoră pentru toate instrumentele cu corzi. Toate aceste instrumente emit sunete atît direct cît și prin cutia de rezonanță care are o importanță esențială pentru timbrul sunetului.

c) *Tuburi sonore.* Tuburile constituie o parte principală pentru instrumentele de suflat, avînd rolul rezonatorului. Sursa sonoră propriu-zisă o constituie ancia sau mușticul*, prin care se produce oscilația aerului care formează unde staționare în tubul sonor. Modul cum se formează componentele sunetului în tuburile deschise sau închise este redat în figurile 5.63, *a* și *b*. Ventrul se formează întotdeauna la ancie sau la mușticuc. Componentele sunetului se obțin, pentru tubul deschis, din relația

$$\nu_n = \frac{n}{2l} v \qquad (5.33)$$

care se poate induce prin generalizare, din figura 5.63, *a*. În adevăr, se observă că lungimea l a tubului este un număr întreg de semilungimi de undă

$$l = n\frac{\lambda}{2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,...)$$

și avem

$$\lambda_n = \frac{v}{\nu_n} \text{ sau } \nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l} n.$$

* Buzele suflătorului au, în cazul utilizării mușticului, un rol asemănător anciei.

Pentru tubul închis, se observă că (fig. 5.63, b) $l = (2n - 1)\frac{\lambda}{4}$ $(n = 1,2,3,...)$, deci

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{4l}(2n - 1). \qquad (5.34)$$

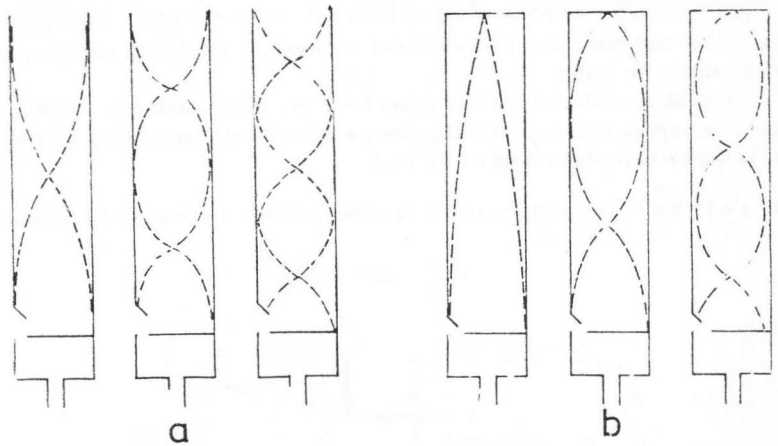


Fig. 5.63. a) Unde staționare în tuburi deschise; b) unde staționare în tuburi închise.

Exemple. 1. Un tub deschis cu lungimea $l = 0,5$ m emite oscilații cu lungimea de undă $\lambda = 1$ m. Să se calculeze: a) Ce armonică produce tubul și ce frecvență are sunetul? b) Se astupă tubul; se cere lungimea de undă a aceleiași armonici a sunetului emis. Viteza sunetului în aer este $v = 340$ m/s.

Rezolvare. a) În acest caz condiția (5.33) dă

$$L = n\frac{\lambda}{2}$$

sau

$$n = \frac{2L}{\lambda} = 1.$$

Este deci prima armonică sau sunetul fundamental cu frecvența,

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{340 \text{ m/s}}{1 \text{ m}} = 340 \text{ Hz}.$$

b) Astupînd tubul, condiția (5.34) dă : $l = (2n - 1)\frac{\lambda_1}{4}$

sau, punînd $n = 1$, $L = \lambda_1/4$ și $\lambda_1 = 4L = 2$ m

Rezultă

$$\nu = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{340 \text{ m/s}}{2 \text{ m}} = 170 \text{ Hz}.$$

Sunetul devine mai grav. Acest fenomen este cunoscut de muzicienii care pun surdină la instrumentele de suflat.

2. O coardă de violoncel are o lungime $l = 1$ m. Masa corzii este de 50 g. La ce tensiune este supusă coarda prin înfășurare pe cuiul de strîngere, dacă ea trebuie să vibreze la frecvența fundamentală de 66 Hz?

Rezolvare. În cazul sunetului fundamental trebuie îndeplinită condiția

$$l = \frac{\lambda}{2} \text{ sau } \lambda = 2 \text{ m}.$$

Deoarece

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{\sqrt{\frac{T}{\mu}}}{\lambda},$$

unde $\mu = \frac{m}{l}$, rezultă tensiunea

$$T = \mu\nu^2\lambda^2 = 50 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot 66^2 \text{Hz}^2 \cdot 4\text{m}^2 = 871{,}2 \text{ N}.$$

Se observă din expresia frecvenței că dacă se modifică tensiunea se poate aduce o ușoară modificare a înălțimii sunetului, adică se poate face operația de acordare a instrumentului. De asemenea, prin schimbarea poziției degetului care apasă pe coardă se poate varia lungimea de undă și, în consecință, frecvența sunetului emis, așa cum, de fapt, se și procedează.

d) *Generator de ultrasunete.* Cînd fețele *1* și *2* ale unei plăci de cuarț tăiată într-un anumit fel dintr-un monocristal (fig. 5.64) sînt excitate cu o tensiune alternativă cu o frecvență oarecare, placa oscilează pe direcția xx' cu o frecvență proprie ν_0. Există o frecvență $\nu_r \approx \nu_0$ a unei surse de tensiune alternativă care produce în placă, la rezonanță unde staționare. Pentru frecvența fundamentală

ν_0 se obține (fig. 5.64, *b*):

$$e = \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2\nu_0} \tag{5.35}$$

v fiind viteza de propagare a undelor de placă, iar e grosimea plăcii. Placa este o sursă de oscilații. Dacă dorim ca placa să emită ultrasunete cu frecvența $\nu \geqslant \nu_0 = 20\,000$ Hz, iar grosimea plăcii trebuie să fie

$$e \leqslant \frac{v}{2\nu_0}.$$

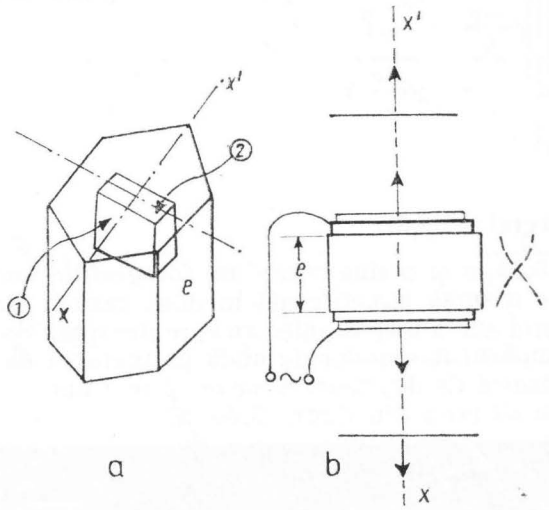


Fig. 5.64. Un cristal piezoelectric tăiat dintr-un cristal de cuarț (a) și undă staționară ultrasonoră într-un astfel de cristal (frecvența fundamentală) (b).

Exemplu. Să se găsească grosimea unei lame de cuarț necesară pentru a fi utilizată la o sursă de ultrasunete cu frecvența de 40 000 Hz, dacă viteza v a undelor în cuarț este de 5 600 m/s.

Rezolvare. Aplicînd relația (5.35), se observă că

$$e = \frac{v}{2\nu} = \frac{5\,600}{2 \cdot 4 \cdot 10^4} = 7 \cdot 10^{-2} \text{(m)}.$$

o grosime foarte mare, extrem de greu de realizat, deoarece nu există, de regulă, cristale din care să se poată confecționa astfel de plăci. În acest caz se folosește un dispozitiv

în care placa de cuarț se închide ca un sandviș între două plăci de oțel (fig. 5.65). Deoarece viteza de propagare în oțel este aproximativ aceeași cu viteza în cuarț, se formează un sistem care respectă condiția de mai sus ($l = e$).

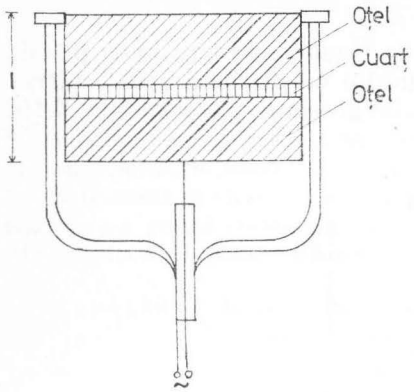
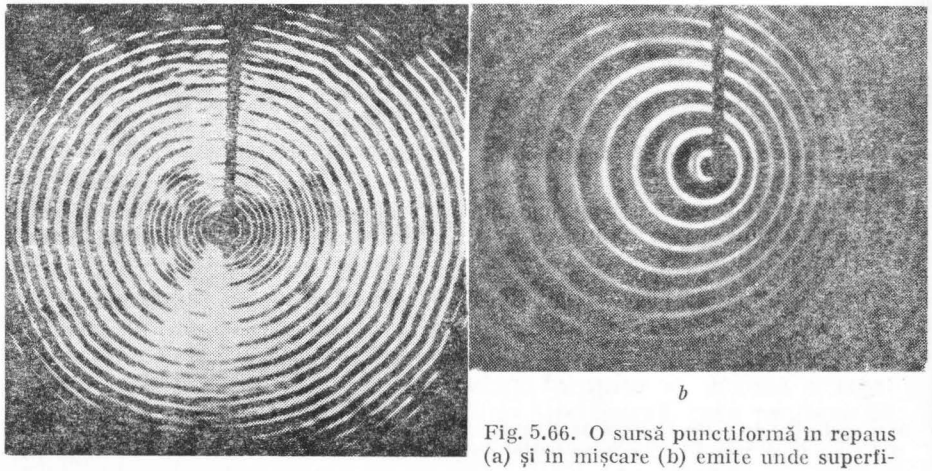


Fig. 5.65. O capsulă cu cuarț piezoelectric și lame de oțel.

5.2.12. Efectul Doppler

În figura 5.66, a și b sînt reproduse fotografiile undelor superficiale emise de o sursă punctiformă în două cazuri: cînd sursa este în repaus și cînd sursa este în mișcare spre dreapta. Se observă (fig. 5.66, b) că numărul lungimilor de undă pe unitatea de lungime este mai mare în sensul de deplasare a sursei și mai mic în sens contrar, comparativ cu situația din figura 5.66, a.



a *b*

Fig. 5.66. O sursă punctiformă în repaus (a) și în mișcare (b) emite unde superficiale circulare.

În cele ce urmează vrem să calculăm care vor fi lungimile de undă determinate de doi observatori O_1 și O_2 aflați în repaus pe o dreaptă de-a lungul căreia se deplasează cu viteza v_s sursa S care emite unde plane (fig. 5.67). La momentul $t = 0$ (fig. 5.67, a) sursa S

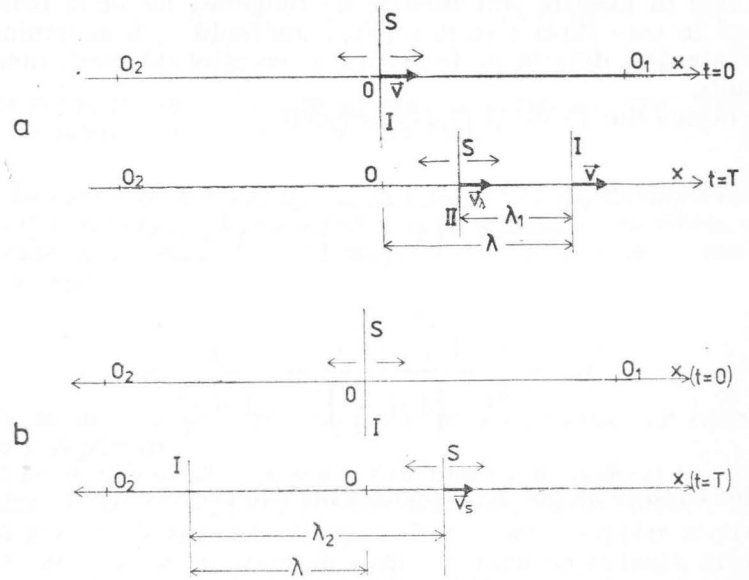


Fig. 5.67. Sursa S emite două fronturi de undă plane succesive. Doi observatori O_1 și O_2 măsoară lungimi de unde diferite.

emite o undă al cărei front se deplasează cu viteza v atît către O_1 cît și spre O_2. La momentul $t = T$, sursa, care între timp s-a deplasat, emite cea de-a doua undă al cărei front în concordanță de fază cu frontul emis la $t = 0$ se deplasează tot cu viteza v.

a) Observatorul O_1 determină lungimea de undă λ_1, adică distanța pe Sx între fronturile emise la $t = 0$ și la $t = T$. Dacă sursa nu s-ar fi deplasat, cea de-a doua suprafață de undă ar fi fost emisă tot din O, iar lungimea de undă măsurată ar fi fost λ. Problema este să se găsească o relație între λ_1 și λ. Se obține

$$\lambda_1 = \left(1 - \frac{v_s}{v}\right)\lambda. \qquad (5.36)$$

b) Observatorul O_2 măsoară lungimea de undă λ_2 (fig. 5.67, b).

$$\lambda_2 = \left(1 + \frac{v_s}{v}\right)\lambda \cdot \qquad (5.37)$$

Pentru observatorii O_1 și O_2 lungimile de undă măsurate cînd sursa este în mișcare sînt diferite de lungimea de undă măsurată în cazul în care sursa este în repaus, frecvența ν_p a sunetului perceput este deci diferită de frecvența ν recepționată cînd sursa este în repaus.

Se obține din (5.36) și (5.37), respectiv :

$$\nu_{p1} = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{\left(1 - \frac{v_s}{v}\right)} = \frac{v}{1 - \frac{v_s}{v}}$$

și

$$\nu_{p2} = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{\left(1 + \frac{v_s}{v}\right)} = \frac{v}{1 + \frac{v_s}{v}} \cdot$$

Cele două relații se pot scrie concentrat sub forma :

$$\nu_p = \frac{\nu}{1 \mp \frac{v_s}{v}}, \qquad (5.38)$$

în care se ia semnul minus pentru cazul în care sursa se apropie de observator și semnul plus pentru cazul în care sursa se îndepărtează. În primul caz observatorul aude un sunet mai ascuțit, iar în al doilea un sunet mai grav decît cel perceput dacă sursa ar fi în repaus.

Această consecință poate fi verificată cel mai bine dacă fiind într-un tren garat sau aflîndu-ne pe peron ascultăm sunetul locomotivei unui alt tren care vine în gară sau se îndepărtează de ea. (Vezi exemplul de calcul următor.)

Exemplu. Un tren accelerat se apropie de o gară cu viteza constantă $v' = 20$ m/s. Locomotiva emite un sunet de avertizare prelung cu frecvența $\nu = 392$ Hz. Apoi trenul se îndepărtează emițînd același sunet. Care sînt frecvențele sunetelor percepute de un observator care se află pe peronul gării? Viteza sunetului în aer este de 340 m/s.

R e z o l v a r e. Sîntem în cazul unui fenomen Doppler. Cînd sursa se apropie, frecvența sunetului recepționat este (relația (5.38))

$$\nu_1 = \nu \frac{v}{v - v'} = 392 \cdot \frac{340}{320} \approx 416 \text{ Hz}$$

iar cînd trenul se îndepărtează

$$\nu_2 = \nu \frac{v}{v + v'} = 392 \cdot \frac{340}{360} \approx 370 \text{ Hz} \cdot$$

Observatorul aude la îndepărtarea trenului un sunet mai grav cu 46 Hz decît la apropierea acceleratului.

b) În cazul în care sursa este în repaus față de sistemul de referință, iar observatorul se apropie sau se îndepărtează cu viteza ν_{ob} de sursa care emite unde care se propagă cu viteza v se obține frecvența recepționată

$$\nu_p = \left(1 \pm \frac{v_{ob}}{v}\right)\nu \qquad (5.39)$$

în care se ia semnul + pentru apropierea de sursă, iar semnul — pentru îndepărtare.

Fenomenul indicat mai sus a fost descris și explicat în 1842 de Christian Johann Doppler, fizician austriac, motiv pentru care și poartă numele de fenomen Doppler. Fenomenul Doppler se produce și cu unde electromagnetice domeniu în care importanța lui depășește cu mult pe cea din domeniul undelor mecanice.

5.2.13. Poluarea sonoră

Sunetul are efecte fiziologice importante. Cercetările au arătat atît efectul binefăcător, cît și cel contrar. Acest ultim caz constituie în special obiectul unui studiu atent, datorită faptului că nivelul sonor al zgomotului este în continuă creștere. Întrucît efectul neplăcut și dăunător al zgomotului este evident, s-a introdus termenul de *poluare sonoră*, care denumește acțiunea prin care se perturbă liniștea.

Există nenumărate surse de poluare sonoră ; printre cele mai importante notăm mijloacele de transport, unele mașini și procedee industriale etc. Dar există numeroase surse de zgomot chiar în locuințe și birouri.

În cele ce urmează dăm un exemplu de sursă de poluare sonoră: zborul supersonic. Prin aceasta se înțelege zborul avioanelor, rachetelor sau proiectilelor cu viteză mai mare decît aceea a propagării sunetului în aer (= 340 m/s*).

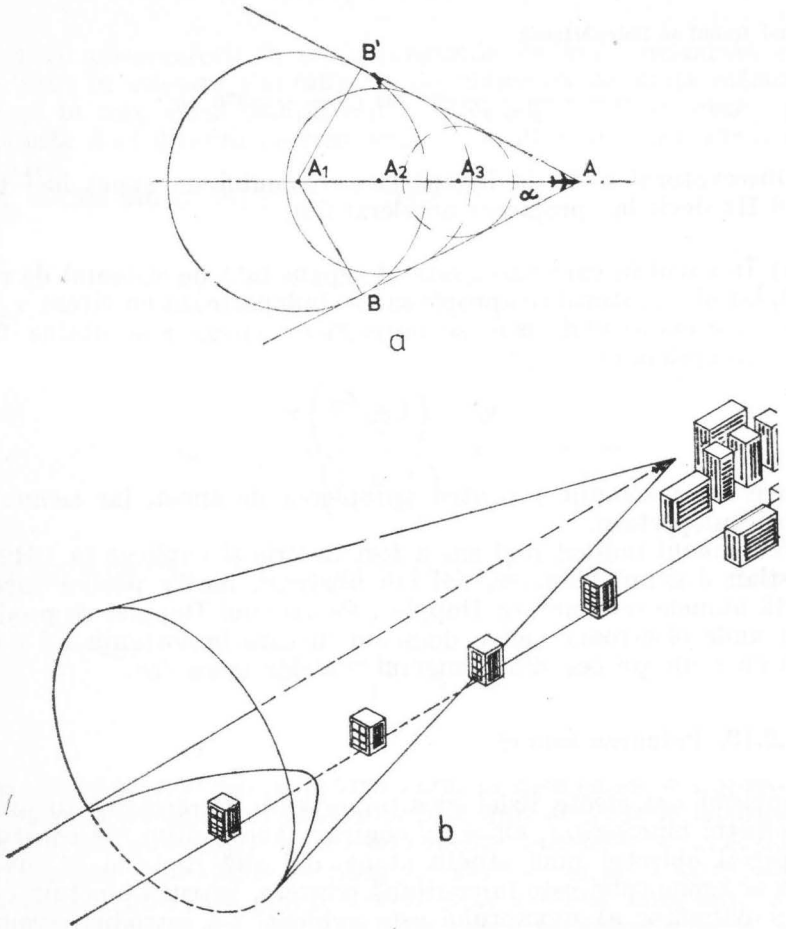


Fig. 5.68. Formarea undei de șoc (a) și intersecția ei cu solul (b).

* Raportul între viteza v a unui mobil și viteza c a sunetului în aer se numește *numărul lui Mach* (M). Deci $M = v/c$. În cazul vitezelor supersonice $M > 1$.

Avionul A care zboară cu viteza supersonică v_A depășește continuu frontul de undă pe care îl emite datorită motoarelor sale sau vibrației prin frecarea cu aerul. Din fiecare punct A_1, A_2, A_3,... al traiectoriei A_1A (fig. 5.68, a), cînd avionul se află acolo, se emit sunete care apoi se propagă cu viteza c. Frontul tuturor undelor, considerate sferice în mediu omogen, este tangent în spațiul conului cu vîrful în A. Pentru un observator, frontul undei este un con cu deschiderea 2α (se observă că $\sin \alpha = c/v_A$) care se deplasează cu viteza sunetului c. Observatorul primește frontul sub forma unui zgomot puternic însoțit de o undă de presiune. Locuitorii zonei perturbate de unda de șoc, aflați deci sub coridorul aerian (fig. 5.68, b) suportă greu nivelul de intensitate sonoră al acestei unde. De asemenea, clădirile suportă vibrațiile care produc uneori pagube importante.

Pentru a se micșora efectele nocive, pe avioanele de transport supersonice se montează atenuatoare de zgomot.

Tot atenuatoare de zgomot sînt și tobele de evacuare instalate la motoarele cu ardere internă. De rolul atenuator de zgomot al tobei ne dăm seama cînd pe lîngă noi trece o mașină cu toba de evacuare spartă, caz în care zgomotul este foarte mare.

Problema poluării sonore are importanță deosebită pentru om, deoarece zgomotul produce nu numai o senzație neplăcută, ci chiar epuizarea nervoasă urmată de scăderea capacității de muncă și îmbolnăvire. Nu punem în discuție cazurile de pierdere a auzului sau de agravare generală a stării fizice și fiziologice.

În tabelul următor se dau cîteva nivele de intensitate sonoră pentru cîteva surse de zgomot și două nivele de comparație:

Sursa	Nivelul (în dB)	Sursa	Nivelul (în dB)
Senzația de durere	120	Aparat de radio	40
Tren	90	Șoapta	20
Traficul unei străzi aglomerate	70	Foșnetul frunzelor	10
Automobil	50	Pragul auzului	0

5.2.14. Defectoscopie ultrasonoră

Comportarea sunetului în procesele de propagare depinde de frecvență. Ultrasunetele, avînd o frecvență foarte mare au proprietăți importante cu aplicații practice interesante. În acest paragraf vom descrie principiul defectoscopiei cu ultrasunete.

Prin acest termen se înțelege descoperirea prin utilizarea ultrasunetelor a defectelor de turnare sau a fisurilor rezultate din utilizarea pieselor metalice.

Metoda controlului ultrasonor pune în valoare următoarele proprietăți ale ultrasunetelor: *a*) posibilitatea obținerii unui fascicul îngust; b) absorbție mai mică decît în cazul altor radiații; c) difracție neînsemnată pe obstacole mici. Există două procedee tehnice pentru control ultrasonor, unul prin transmisie (mai puțin precis), al doilea prin reflexie. Vom descrie construcția și funcționarea defectoscopului prin reflexie (fig. 5.69). Generatorul G comandă sursei S

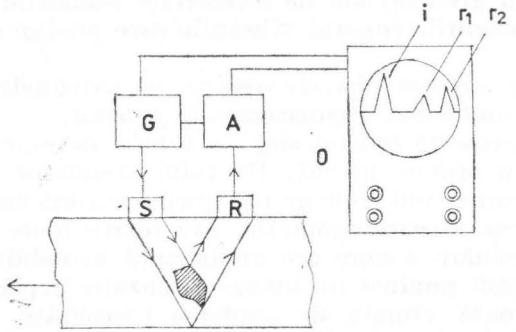


Fig. 5.69. Principiul defectoscopiei prin reflexie.

emiterea unui semnal la intervale de timp egale. Semnalul se propagă într-un fascicul îngust pe direcția arătată și se reflectă pe fața opusă și pe eventualele goluri sau fisuri. Impulsul incident și cele reflectate, captate de receptorul R sînt amplificate în amplificatorul A și trimise în oscilatorul electronic pe ecranul căruia apar, decalate în timp, impulsul incident (i) și cele reflectate pe un defect (r_1) sau pe fața opusă (r_2). După poziția lui (r_1) în raport cu (i) și (r_2) se poate afla adîncimea la care se găsește defectul.

Primul defectoscop cu ultrasunete românesc a fost construit la Cluj-Napoca, de prof. Aurel Ionescu*, în 1950.

5.2.15. Unde seismice

În interiorul globului pămîntesc, la adîncimi variabile de pînă la aproximativ 700 km, se acumulează cu timpul tensiuni imense datorită cărora se produc brusc și neașteptat rupturi și deplasări care constituie uneori perturbații violente (*cutremure*). Locul sau regiunea în care se produce mișcarea se numește focar sau *hipocentru*, iar locul de pe suprafața Pămîntului aflat pe verticala acelui loc sau regiune se numește *epicentru*.

* Aurel Ionescu (1902—1954), profesor universitar la universitățile din București și Cluj-Napoca. Experimentator de mare talent. A construit prin mijloace proprii aparatură și dispozitive extrem de ingenioase.

Datorită caracterului relativ elastic al rocilor, perturbația se transmite din aproape în aproape sub forma unei unde (*unda seismică*). Locul unde ajunge unda seismică resimte mișcarea sub forma unei zguduituri. La noi în țară, cutremurele de la 10 XI 1940 și 4 III 1977 au avut focarul într-o regiune la o adîncime de 130 km, respectiv 95 km sub lanțul munților Vrancei, epicentrul fiind la curbura Carpaților, aproximativ în regiunea orașului Focșani.

Înregistrarea mișcării seismice se face la suprafața Pămîntului cu ajutorul unui seismograf (fig. 5.70). Aparatul este încastrat în sol. Cînd solul începe să se miște sub acțiunea undei seismice, corpul C fiind masiv și putîndu-se roti cu o foarte mică frecare în jurul axei

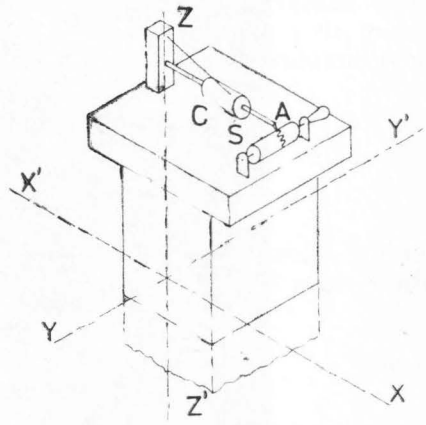


Fig. 5.70. Principiul de construcție a unui seismograf.

ZZ', poziția relativă a suportului și a corpului C se modifică, acul inscriptor A înregistrînd mișcarea relativă pe hîrtia înfășurată pe sulul S care se rotește uniform. Rezultatul unei înregistrări se poate observa pe fotografia 5.71, în care se reproduce o seismogramă a cutremurului de la 4 III 1977 înregistrat la ora 21 și 21 min pe un seismograf instalat la Timișoara. Seismograful din figura 5.70 poate înregistra oscilațiile pe direcția yy'. Un alt seismograf așezat perpendicular poate înregistra oscilațiile pe o direcție perpendiculară xx' și completează informațiile cu privire la oscilațiile în plan orizontal. Dacă se lasă corpului C posibilitatea de mișcare pe verticală, seismograful poate înregistra oscilațiile verticale ale solului. Astfel, cu un sistem

de trei seismografe instalate într-un loc se poate obține o informație completă cu privire la mișcarea solului în acel loc.

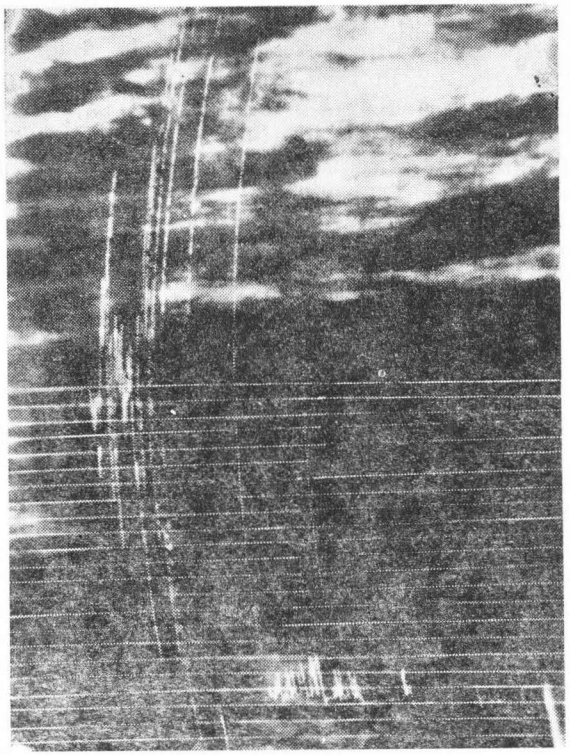


Fig. 5.71. Seismogramă a cutremurului din 4 III 1977 înregistrată la Timișoara.

De la focar undele seismice se propagă în toate direcțiile, pe toate căile, atît sub formă de unde transversale, cît și sub formă de unde longitudinale. În procesul de propagare undele seismice se reflectă, se refractă și sînt absorbite. Analiza propagării undelor se face cu ajutorul unui sistem de stații seismice răspîndite pe tot globul. Înregistrarea aceluiași cutremur de către toate stațiile seismice dă posibilitatea ca, prin compararea înregistrărilor, să se traseze cu o oarecare precizie drumul undei seismice și să se obțină informații cu privire la structura internă a Pămîntului.

6

STATICA FLUIDELOR

Un fluid are proprietatea de a curge. Prin aceasta se înțelege că „particulele" corpului fluid se pot mișca unele în raport cu cele lalte; proprietatea determină și faptul că un corp fluid își poate modifica forma sub acțiunea greutății proprii. Fluidele formează două categorii de corpuri : *gazele* și *lichidele*. Spre deosebire de lichide, gazele au în plus proprietatea de a fi expansibile, ocupînd tot volumul recipientului în care se află.

6.1. Presiunea

Presiunea reprezintă cîtul dintre forța F care se exercită normal și uniform pe o porțiune de suprafață și aria S a suprafeței considerate

$$p = \frac{F}{S}. \qquad (6.1)$$

Prin exercitare uniformă se înțelege că pe suprafețe egale se exercită forțe egale. În acest caz presiunea este aceeași în orice punct al suprafeței. Unitatea de măsură a presiunii este în SI

$$[p] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa}$$

și se numește *pascal*.

Exemplu. Ce presiune exercită asupra discului acul unui picup dacă lărgimea șanțului de înregistrare este de 0,03 mm, iar masa brațului este de 8 g.

$$p = \frac{F}{S} = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8}{3{,}14\,(3 \cdot 10^{-5})^2} = 1{,}2 \cdot 10^8 \text{ Pa} \approx 1\,200 \text{ atm}$$

Comparată această presiune, cu aceea exercitată pe asfalt de pneurile unui camion de 10 tone, este de aproximativ de 100 ori mai mare!

6.2. Presiunea atmosferică

Acest termen denumește presiunea exercitată într-un punct oarecare de către *atmosferă*, stratul de aer care înconjoară Pămîntul. E. Torricelli a dovedit experimental existența presiunii atmosferice (fig. 6.1). Tubul T umplut mai întîi cu mercur este astupat cu degetul și răsturnat în cuva cu mercur C. Mercurul coboară pînă la înălțimea h lăsînd vid în camera barometrică $c.b$.

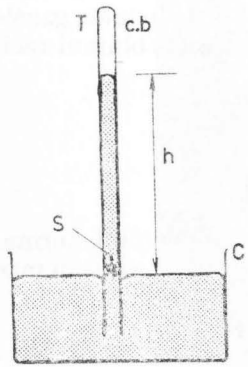


Fig. 6. 1. Experimentul lui Torricelli.

Presiunea hidrostatică exercitată de coloana de mercur la baza ei pe secțiunea S este egalată de presiunea atmosferică de pe suprafața liberă a lichidului, transmisă prin mercur conform principiului lui Pascal (§6.3).

Presiunea atmosferică este în același loc o mărime în general variabilă cu timpul. De asemenea, presiunea atmosferică variază de la un loc la altul. Se alege ca *presiune atmosferică normală* (*standard*) p_0 presiunea exercitată de o coloană de mercur de 760 mm, la nivelul mării, numită atmosferă fizică, notată cu atm

$p_0 = 1$ atmosferă fizică $= 1$ atm $= 760$ Torri.

Relația dintre atmosferă (fizică) și pascal este dată de expresia (6.3) a presiunii hidrostatice

$$1 \text{ atm} = 13\,600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}76 \text{ m} = 1{,}013 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Presiunea atmosferică variază neîncetat în funcție de starea meteorologică. Presiunea atmosferică variază cu altitudinea. Pentru exprimarea dependenței se folosește sau o aproximare a) sau formula barometrică b):

a) În vecinătatea solului cu fiecare 10,5 m în înălțime presiunea scade cu 1 Torr. Întrucît densitatea aerului descrește cu altitudinea această regulă dă erori mari la înălțimi mari.

b) În condiții în care densitatea ρ este proporțională cu presiunea p, iar temperatura aerului și accelerația gravitațională rămîn constante cu înălțimea, se demonstrează că

$$p = p_0 e^{\frac{-\gamma_0 y}{p_0}}$$

unde p este presiunea la altitudinea y, p_0 este presiunea la nivelul mării ($y = 0$), iar γ_0, greutatea specifică a gazului. Și această lege dă erori importante, după cum se vede din ipotezele simplificatoare pe care se bazează.

6.3. Presiunea într-un fluid

Într-un fluid aflat în echilibru în cîmpul gravitațional apare o presiune datorată greutății fluidului. Fie presiunile p_1 și p_2. Volumul de fluid este în echilibru la nivelele x_1 și x_2 luate în raport cu un nivel de referință. Diferența de presiune provine din greutatea coloanei cilindrice de fluid dintre cele două nivele (fig. 6.2) și este, aplicînd definiția (6.1),

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho g\,(h_2 - h_1)\,S}{S} =$$

$$= \rho g\,(x_2 - x_1), \qquad (6.2)$$

unde ρ este densitatea fluidului, iar g accelerația gravitațională, considerată constantă.

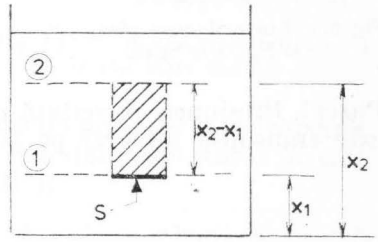


Fig. 6.2. Un volum de fluid în echilibru în cîmpul gravitațional.

Dacă aplicăm relația (6.2) pentru un lichid aflat într-un vas putem calcula presiunea p ce se exercită la o anumită adîncime h. Notînd cu $p_0[=p_2]$ presiunea la nivelul suprafeței lichidului se obține

$$p = p_0 + \rho g h. \qquad (6.3)$$

Relația arată că presiunea într-un punct din interiorul unui fluid aflat în echilibru în cîmpul gravitațional este egală cu presiu-

nea care se exercită la suprafața lui la care se adaugă presiunea datorată greutății coloanei de fluid cu înălțimea egală cu diferența de nivel dintre cele două puncte. Cu alte cuvinte, presiunea exercitată la suprafața unui fluid este transmisă în orice punct. Acest adevăr se numește *principiul lui Pascal*, dar este o consecință a relației (6.2).

Aplicații a) *Rampa hidraulică*, folosită în atelierele de reparații auto și în stațiile service (fig. 6.3), se bazează pe principiul lui

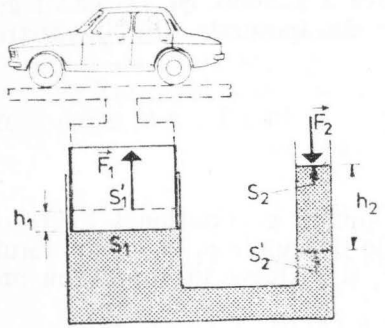


Fig. 6.3. Lucrurile mecanice $F_1 h_1$ și $F_2 h_2$ sînt egale

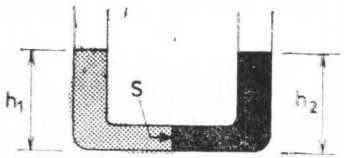


Fig. 6.4. Lichid omogen în vase comunicante.

Pascal. Presiunea exercitată de lichide în conducta de secțiune mică este transmisă integral pe pistonul mare

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}.$$

Forța aplicată F_1 este amplificată pînă la valoarea F_2 în raportul în care se găsesc suprafețele

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1}.$$

Amplificarea forței a fost calculată în ipoteza înlăturării frecărilor.

Presiunea exercitată în cilindrul mic se datorește introducerii lichidului în instalație cu ajutorul unei pompe.

b) Un lichid omogen aflat în *vase comunicante* se ridică la același nivel. La baza ramurilor, pe secțiunea S de exemplu, (fig. 6.4) presiunea în stînga este $p_1 = p_0 + \rho g h_1$, iar la dreapta $p_2 = p_0 + \rho g h_2$. Întrucît lichidul este în echilibru, $p_1 = p_2$ și rezultă $h_1 = h_2$ (p_0 este presiunea atmosferică).

c) *Sifonul chiuvetei*. Lichidul care se scurge prin tubul T (fig. 6.5) în sifon, un compartiment C formînd un vas comunicant cu tubul T, care are legătura cu conducta de evacuare E. Nivelul lichidului fiind același în T și C surplusul lichidului care se scurge din bazin este evacuat. Astfel, lichidul rămas în sifon izolează camera de conductele de evacuare.

d) *Sifonul pentru transferarea lichidului dintr-un vas în altul*. Tubul din figura 6.6 face legătura între două vase aflate la nivel diferit.

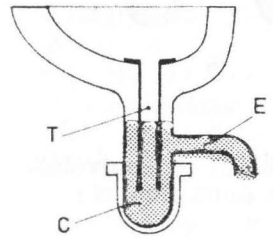


Fig. 6.5. Sifonul chiuvetei.

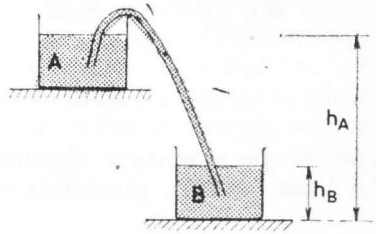


Fig. 6.6. Presiunea hidrostatică în A este mai mare decît în B.

Cînd tubul este plin cu lichid diferența de presiune între capetele A și B ($p_A > p_B$) determină antrenarea lichidului din vasul în care nivelul lichidului este mai sus spre celălalt.

Exemplu. În sudul insulelor Mariane din Oceanul Pacific s-a măsurat adîncimea de 11 022 m (Groapa Marianelor). Să se calculeze presiunea hidrostatică la această adîncime.

Aplicăm relația (6.3):

$$p = \rho g h = 1\,000 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 11\,022 \text{ m} = 108\,015 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

adică aproximativ 1 000 atm ! (S-a neglijat $p_0 = 1$ atm.)

6.4. Aparate de măsurare a presiunii

Aceste aparate se numesc *manometre*. Dintre acestea, cele care măsoară exclusiv presiunea atmosferică se numesc *barometre*. În

cele ce urmează se descriu cîteva tipuri de manometre mai utilizate.

Manometru cu mercur cu tub deschis. Recipientul în care se află fluidul la presiunea de măsurat p este legat cu manometrul, un tub în formă de „U" în care se află mercur (fig. 6.7, a). Datorită

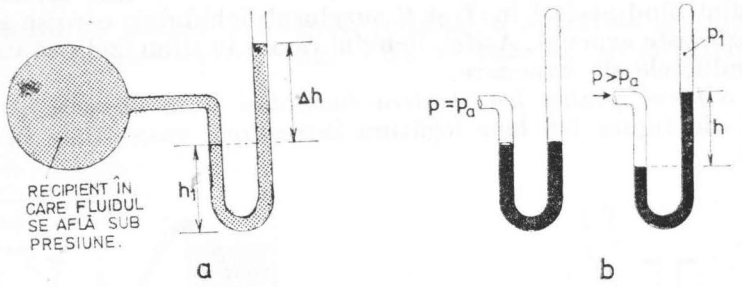


Fig. 6.7. Manometrul cu tub deschis (a) și cu tub închis (b).

apăsării pe suprafața ramurei din stînga, mercurul se denivelează. La baza tubului, presiunea este aceeași în cele două ramuri :

$$p_1 = p + \rho g h_1$$

și

$$p_2 = p_0 + \rho g\,(h_1 + \Delta h).$$

Deci :

$$p + \rho g h_1 = p_0 + \rho g(h_1 + \Delta h)$$

și

$$p = p_0 + \rho g \Delta h.$$

Cunoscînd presiunea atmosferică p_0 se determină presiunea p din recipient prin măsurarea diferenței de nivel între mercurul din cele două ramuri.

Presiunea p poate fi măsurată relativ la presiunea zero (*presiune absolută*) sau în raport cu presiunea atmosferică p_0 (*presiune relativă*). În acest al doilea caz se măsoară diferența de presiune $p-p_0$, care mai este numită suprapresiune ($p-p_0 > 0$) sau depresiune ($p-p_0 < 0$). Presiunile mai mici decît presiunea atmosferică se numesc vid sau vacuum.

Manometrele industriale se gradează avînd ca zero presiunea atmosferică normală. Utilizarea manometrului cu mercur a impus

folosirea unei unități de presiune corespunzătoare — presiunea unei coloane de mercur cu înălțime egală cu un milimetru numită Torr. Rezultă din calcul, folosind relația ($p - p_0 = \rho g h$) în care înlocuim $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ kg/m^3 și $g = 9{,}8$ m/s^2

$$1 \text{ torr} = 13{,}6 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10^{-3} \quad \text{m} = 133{,}28 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

O altă unitate tolerată este barul (simbolul bar)

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

Manometrul cu aer comprimat. La presiuni mai mari înălțimea denivelării coloanelor de mercur din manometrul cu tub deschis ar deveni mult prea mare necesitînd lungirea exagerată a tubului de sticlă. Prin închiderea unei ramuri (fig. 6, 7, *b*) și umplerea spațiului cu aer la presiunea atmosferică, mercurul din cele două ramuri se află la același nivel. Dacă presiunea de măsurat este p, iar diferența dintre coloane are valoarea h, atunci

$$p = p_1 + \rho g h$$

în care p_1 este presiunea aerului închis care poate fi apreciată în funcție de raportul între volumul ocupat la presiunea p_1 și cel ocupat la presiunea atmosferică normală p_0 conform legii lui Boyle-Mariotte (vezi (8.6)) :

$$\frac{p_0}{p_1} = \frac{V_1}{V_0}$$

rezultă

$$p = \frac{V_0}{V_1} p_0 + \rho g h.$$

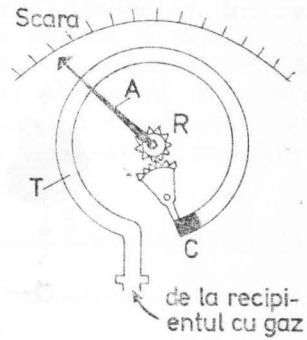


Fig. 6.8. Manometrul metalic.

Scara aparatului este gradată la etalonare astfel încît citirea se face direct.

Manometrul metalic. Tubul metalic T (fig. 6.8) se deformează sub presiunea gazului care pătrunde din recipient. Cînd gazul se găsește la presiunea atmosferică acul A se află la zero. Dacă pre-

siunea crește, tubul are tendința să-și micșoreze curbura (să se îndrepte ușor), capătul C trăgînd de pîrghia cu sector dințat care antrenează rotița R solidar legată de acul indicator ce se deplasează în fața cadranului.

6.5. Principiul lui Arhimede

Separăm o regiune din interiorul unui lichid (fig. 6.9, *a*) aflat în echilibru. Volumul de lichid este de asemenea în echilibru, greutății lui $\vec{G}$ opunîndu-i-se o forță ascendentă $\vec{F}$. Deci

$$F = G = mg = \rho Vg. \tag{6.4}$$

Orice corp introdus în lichid dislocuiește un anumit volum de lichid și suferă din partea lichidului aceeași forță ascendentă ca și lichidul care s-a aflat mai înainte în acel loc sau, conform (6.4), o forță egală cu greutatea volumului de lichid dislocuit. Punctul de aplicație al forței cu care lichidul acționează asupra corpului introdus este centrul de greutate al lichidului dislocuit. Această forță se mai numește *forță arhimedică*, iar punctul de aplicație este numit *centru de presiune*. Atunci cînd corpul introdus este omogen, centrul de presiune coincide cu centrul de greutate al corpului.

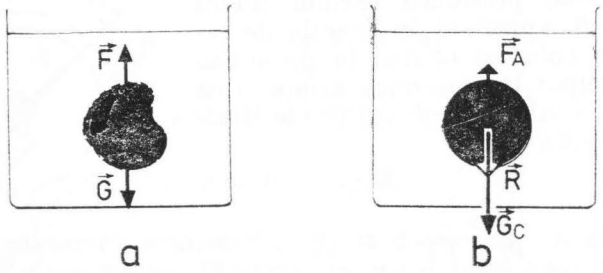


Fig. 6.9. Forța arhimedică.

6.6. Aplicații

Plutirea unui corp. Față de greutatea unui corp introdus în fluid forța arhimedică F poate fi în modul : *a*) mai mică, *b*) egală și *c*) mai mare decît greutatea lui G. Fie R modulul rezultantei (fig. 6.9, b),

$$R = G - F.$$

a) Dacă $F < G$, corpul cade la fund.

b) Dacă $F = G$, corpul rămîne în echilibru în orice loc în lichid.

c) Dacă $F > G$, corpul se ridică spre suprafața lichidului. La suprafață, o parte ieșind din apă, forța arhimedică se micșorează pînă cînd egalează greutatea, realizînd *condiția de plutire.*

De exemplu, un vas (fig. 6.10) este un corp neomogen. Partea din apă are un centru de presiune care nu coincide cu centrul ei de greutate. Datorită formei transversale a vasului, centrul de presiune ocupă un loc variabil în funcție de poziție. (De comparat cele două desene din fig. 6.10). Cînd vasul este aplecat spre babord sau tribord se formează un moment de revenire care echilibrează momentul de răsturnare creat de forțele exterioare (vîntul, valurile).

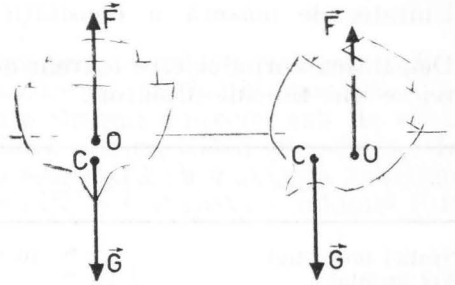


Fig. 6.10. Cuplul de readucere a vasului în poziția normală.

Variația forței arhimedice este realizată practic la *submarine.* La suprafața apei, submarinul plutește ca un vas obișnuit. Pentru scufundare se introduce apa în compartimente speciale. Reglarea adîncimii de imersie este făcută prin admisia sau expulzarea apei din aceste compartimente, iar cînd vasul este în mișcare, și cu ajutorul unor cîrme-voleți de adîncime (v. și fig. 7.13).

Exemplu. Să se calculeze ce parte din volumul total al unui iceberg rămîne la suprafața apei.

Greutatea $G_i = \rho_i v_i g$ a icebergului este echilibrată de forța arhimedică $F_a = \rho_{apa} Vg$ ce acționează asupra părții de volum V aflată în apă

$$\rho_i V_i g = \rho_{apă} Vg$$

de unde rezultă

$$\frac{V}{V_i} = \frac{\rho_i}{\rho_{apă}}$$

și observînd tabelul de la p. 226 se calculează $\frac{V}{V_i} = \frac{9}{10} = 90\,\%$, adică numai $\frac{1}{10}$ din volumul icebergului se vede la suprafață.

6.7. Densitatea și greutatea specifică

Densitatea. Se numește *densitate* ρ a unui corp omogen raportul între masă m și volumul corpului V

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{6.4}$$

Unitatea de măsură a densității este $[\rho] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Densitatea corpului este extrem de variată în limite largi așa cum reiese din tabelul următor:

Corpul	Densitatea, în kg/m³	Corpul	Densitatea, în kg/m³
Spațiul interastral	10^{-18}—10^{-21}	Apa (la 0°C și 1 atm)	10^3
Vid înaintat	10^{-16}	Mercurul	$13{,}6 \cdot 10^3$
Aerul (la 0°C și 1 atm)	1,3	Nucleul Uraniului	10^{17}
Gheața	$0{,}9 \cdot 10^3$		

Prin definiție, *greutatea specifică* a unui corp este cîtul dintre greutatea corpului G și volumul lui V

$$\gamma = \frac{G}{V}. \tag{6.5}$$

Unitatea de măsură este

$$\gamma = \frac{[G]}{[V]} = \frac{\text{N}}{\text{m}^3}.$$

Ținînd seamă de definiție și de relația (6.4) se poate scrie

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{mg}{V} = \frac{m}{V} g = \rho g.$$

Întrucît volumul corpului depinde de temperatură (vezi §8.3) densitatea unui corp se modifică cu schimbarea temperaturii. În

cazul apei (vezi fig. 8.5), densitatea maximă este la temperatura de 4°C.

Raportînd densitatea unui corp la densitatea maximă a apei se definește un număr numit densitate relativă:

$$d = \frac{\rho}{\rho_{apă}}. \tag{6.6}$$

6.8. Densimetre

Determinarea densității se face prin metode și cu aparate diferite. Aici descriem cîteva *densimetre* cu destinație practică.

Un densimetru cu imersie este alcătuit dintr-un tub de sticlă care poate pluti în poziție verticală într-un lichid (fig. 6.11). În această poziție greutatea tubului este egală cu greutatea lichidului dislocuit. Dacă masa m a tubului care se scufundă cu volumul V în lichidul de densitate ρ atunci

$$m = \rho V,$$

iar la scufundarea cu volumul V' în lichidul de densitate ρ'

$$m = \rho' V'$$

Fig. 6.11. Densimetru cu imersiune.

și prin compararea relațiilor se obține

$$\frac{V}{V'} = \frac{\rho'}{\rho}$$

de unde se poate determina densitatea ρ' cînd se cunosc ceilalți trei termeni din proporție.

Densimetrele se etalonează prin introducerea lor în lichide de densitate diferită. În acest fel sînt construite densimetrele cu destinație specială: lactometrele — care măsoară conținutul în grăsime al laptelui, alcoolmetrele — care măsoară concentrația în alcool a unui amestec etc.

7

DINAMICA FLUIDELOR

7.1. Fluidul ideal

Sub această denumire se includ fluidele care se află în asemenea condiții încît să se poată neglija compresibilitatea și frecările interne. Prima cerință este îndeplinită cu o foarte bună aproximație de toate lichidele. Gazele pot fi considerate de asemenea incompresibile dacă diferențele de presiune sînt foarte mici. În anumite cazuri forțele de frecare interne sînt neglijabile în comparație cu cele gravitaționale sau cu acelea datorite diferențelor de presiune.

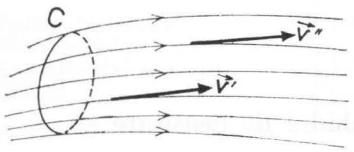


Fig. 7.1. Linii de curent.

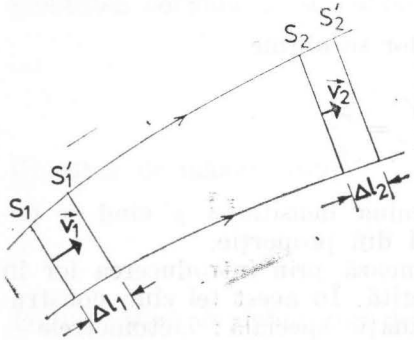


Fig. 7.2. Pentru ecuația de continuitate.

Curgerea unui fluid poate fi vizualizată prin anumiți trasori. O substanță colorată adăugată într-un lichid marchează traiectoriile diferitelor particule, numite *linii de curent* (fig. 7.1). O linie de curent este tangentă vitezei particulei în orice punct. Totalitatea liniilor de curent tangente unui contur (C) se numește tub de curent (fig. 7.1). Spectrul liniilor de curent ne dă o imagine asupra proceselor care au loc în timpul curgerii unui fluid (fig. 7.9 și 7.16).

Dacă, în timp, viteza fluidului în fiecare punct al spațiului rămîne constantă curgerea se numește *staționară*. În caz contrar curgerea este *nestaționară*. La deschiderea sau la închiderea unui robinet curgerea rămîne un interval de timp nestaționară.

7.2 Ecuația de continuitate.

Considerăm un tub de curent într-un fluid ideal cuprins între două secțiuni perpendiculare S_1 și S_2 (fig. 7.2). După un interval de timp Δt particulele de fluid din secțiunea S_1 se deplasează cu viteza $\vec{v}_1$ în secțiunea foarte apropiată S_1',iar cele din S_2 avînd viteza $\vec{v}_2$ se vor mișca în S_2'. Fluidul fiind incompresibil, masa de fluid intrată prin secțiunea S_1 în volumul considerat trebuie să iasă prin secțiunea S_2. Vom aproxima volumul dintre cele două secțiuni S_1, S_1' de arie A_1 și cel dintre S_2 și S_2' de arie A_2 prin mici cilindri. Deci :

$$A_1\Delta l_1 = A_2\Delta l_2$$

sau

$$A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t.$$

Întrucît viteza este numeric egală cu spațiul străbătut în unitatea de timp de particulele de fluid dintr-o secțiune, produsul Av este volumul de fluid care trece în unitatea de timp prin secțiune, adică debitul volumic (q_v). Rezultă din relația precedentă că debitul volumic este constant

$$q_v = \text{ct} \tag{7.1}$$

relație care se numește *ecuația de continuitate*. Debitul volumic se măsoară în $\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$: $[q_v] = \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$.

7.3. Ecuația lui Bernoulli

Într-un tub de curent (fig. 7.3) fluidul ideal aflat între secțiunile S_1 și S_2 perpendiculare pe direcția de curgere, se deplasează sub acțiunea forțelor exercitate de presiunile p_1 și p_2. Aceste presiuni sînt datorite exercitării unei acțiuni din partea unei pompe, sau a greutății fluidului, sau datorită reacțiunii restului lichidului etc. Într-un interval de timp Δt fluidul de masă $m = \rho g S_1 \Delta l_1$ cuprins între S_1 și S_2 s-a deplasat în poziția $S_1'S_2'$. Totul se petrece ca și cum fluidul dintre S_1 și S_1' s-ar deplasa de la înălțimea h_1 la h_2 între S_2 și S_2'. Lucrul mecanic efectuat de forțele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ pe secțiunile S_1 și S_2 este, ținînd seama de incompresibilitate ($\Delta l_1 S_1 = \Delta l_2 S_2 = \Delta V$),

$$L_1 = F_1\Delta l_1 - F_2\Delta l_2 = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = (p_1 - p_2)\Delta V.$$

Lucrul mecanic efectuat determină variația energiei mecanice a fluidului cuprins între S_1 și S_1'.

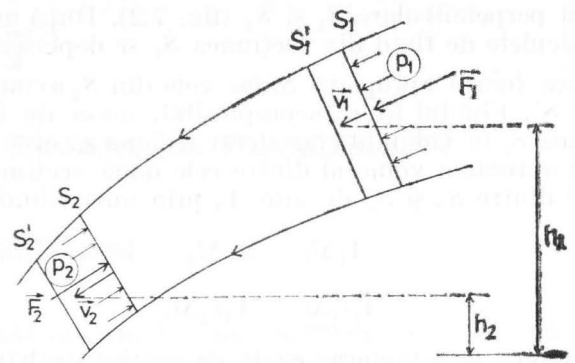


Fig. 7.3. Pentru scrierea ecuației lui Bernoulli.

$$\Delta E = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 + mgh_2 - mgh_1$$

și înlocuind masa prin $\rho\Delta V$ se obține

$$(p_1 - p_2)\Delta V = \frac{1}{2}\rho\Delta V(v_2^2 - v_1^2) + \rho\Delta V g(h_2 - h_1)$$

sau împărțind cu ΔV : $p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(h_2 - h_1)$.

Separînd termenii cu indici comuni unei secțiuni se ajunge la

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 \qquad (7.3)$$

adică expresia

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h$$

este constantă, indiferent de punctul considerat. Toți termenii relației (7.3) au semnificația unei presiuni : p este *presiunea statică*,

$\frac{1}{2}\rho v^2$ este presiunea datorită faptului că fluidul se deplasează cu o viteză oarecare (v) motiv pentru care se numește *presiune dinamică*, ρgh este presiunea datorită diferenței de nivel față de nivelul de referință ales. Cu aceste denumiri teorema lui Bernoulli se enunță :

Suma presiunilor statică, dinamică și datorită diferenței de nivel, numită și presiune totală, este constantă.

În cazul unui tub de curent orizontal ecuația (7.3) devine

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2 \qquad (7.4)$$

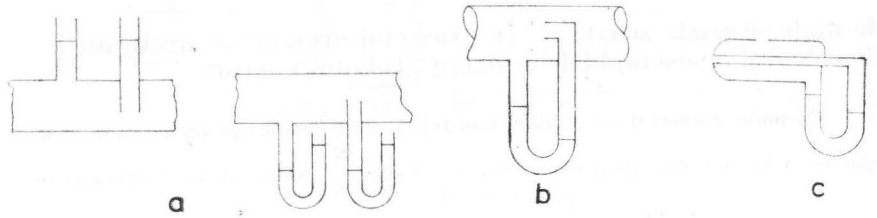


Fig. 7.4. Sonde de presiune :
a) statică ; b) dinamică ; tub Pitot și c) Prandtl.

În cele ce urmează ne vom referi la cîteva consecințe și aplicații ale acestui caz. Presiunea statică se măsoară cu o sondă de presiune (fig. 7.4, a) așezată paralel cu direcția de curgere. Se observă că o sondă de forma din figura 7.4 b, dă presiunea totală, iar diferența dintre coloane indică presiunea dinamică. O variantă a acestui sistem de tuburi care permite măsurarea directă a presiunii dinamice este tubul Prandtl (fig. 7.4, c).

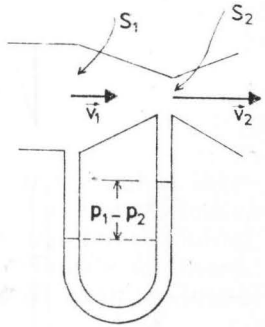


Fig. 7.5. Tubul Venturi.

7.4. Aplicații

a) *Tubul Venturi.* Lichidul are vitezele v_1 și v_2 în secțiunea largă, respectiv în cea îngustă. Aplicînd ecuația lui Bernoulli în cele două secțiuni se scrie (fig. 7.5)

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

De aici, cunoscînd secțiunile S_1, S_2 presiunile p_1, p_2 și folosind relația de continuitate $S_1v_1 = S_2v_2$ se pot afla vitezele și apoi debitul lichidului de densitate ρ.

Eliminînd v_2 între cele două ecuații precedente se obține

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_1^2}{2}\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2$$

și

$$p_1 - p_2 = v_1^2 \frac{\rho}{2}\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)$$

de unde se poate scoate v_1. În exemplul următor se arată un model de calcul și un exemplu de utilizare a tubului Venturi.

Exemplu. Raportul secțiunilor unui tub Venturi montat pe un avion în zbor este egal $\frac{1}{2}$, iar diferența de presiune este de $13328 \frac{N}{m^2}$. Să se calculeze viteza avionului știind că $\rho_{aer} = 1{,}3 \frac{kg}{m^3}$.

Din relația precedentă rezultă

$$v_1 = \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{\frac{\rho_{aer}}{2}\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 13328}{1{,}3(4-1)}} \approx 82{,}7 \frac{m}{s}.$$

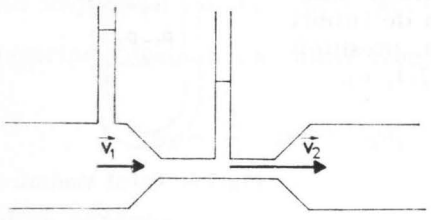


Fig. 7.6. Modificarea presiunii statice cînd secțiunea variază.

Producerea unei depresiuni la trecerea aerului printr-o secțiune îngustată (fig. 7.6) este folosită pentru aspirarea vaporilor de benzină în carburator, pentru aspirarea lichidelor în pulverizatoare și spreiuri, în unele pompe aspiratoare (trompa de apă), la arzătoarele de gaze.

b) *Efectul Magnus.* O minge care se rotește antrenează straturile de aer din imediata vecinătate (fig. 7.7). În A viteza fluidului crește. Simultan se mărește presiunea dinamică și scade cea statică. În B variația se produce în sens invers. Diferența de presiune statică determină o forță care împinge mingea dinspre B deviind-o de la traiectoria pe care s-ar deplasa dacă nu s-ar roti. Fenomenul este cunoscut în sport ca „aruncarea

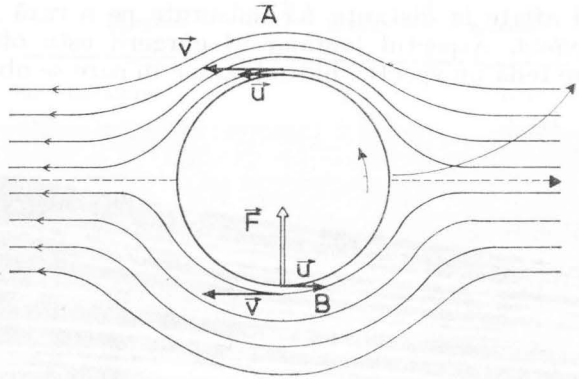


Fig. 7.7. Explicarea efectului Magnus.

mingii cu efect" și este folosit intenționat pentru a deruta adversarul.

7.5. Fluidul real

7.5.1. Curgerea laminară

Datorită frecării particulelor de fluid cu pereții vasului și între ele, vitezele într-o secțiune a unei conducte prin care curge fluidul diferă (fig. 7.8, a). Existînd particule care au aceeași viteză fluidul se stratifică luînd aspect de lame. Curgerea se numește *laminară*. În figura 7.8, b este reprezentat un model al curgerii laminare într-o

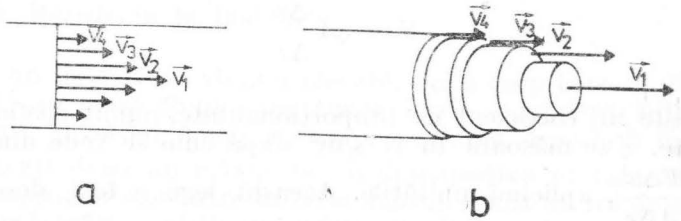


Fig. 7.8. Curgerea laminară.
a) distribuția vitezelor; b) model mecanic.

conductă cilindrică. Viteza scade de la v_1 pe axa tubului, la zero, în contact cu pereții. Raportul $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ dintre variația vitezei între două straturi aflate la distanța Δx măsurate pe o rază se numește *gradient de viteză*. Aspectul laminar al curgerii este observabil în figura 7.9 care redă un spectru hidrodinamic în care se observă liniile

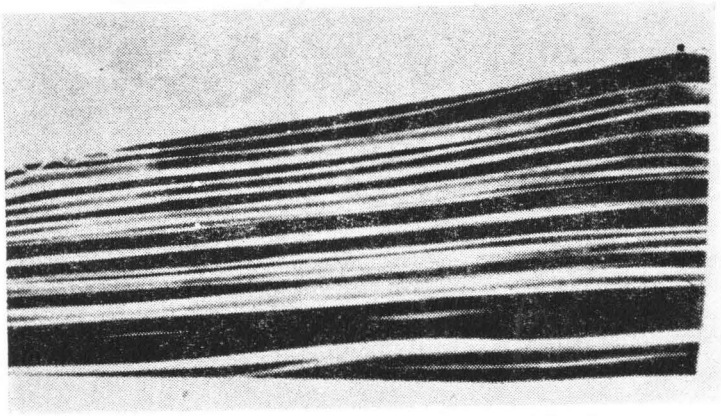


Fig. 7.9. Spectru hidrodinamic al curgerii laminare.

de curent. La viteze mici straturile de fluid alunecă lin unele peste altele, creîndu-se forțe de frecare tangențiale, numite *forțe de vîscozitate*.

Experiența arată că între două straturi în contact pe o suprafață de arie A forța de vîscozitate F este direct proporțională cu aria suprafeței și cu gradientul de viteză $\frac{\Delta v}{\Delta x}$

$$F = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

unde η este un coeficient de proporționalitate, numit coeficient de vîscozitate. η se măsoară în $N \cdot s/m^2$ după cum se vede din expresia $\eta = \frac{F \Delta x}{A \Delta v}$, aplicînd unitățile. Această lege a fost descoperită de I. Newton. Fluidul real este vîscos. Vîscozitatea este diferită la lichide diferite. Uleiul este mai vîscos decît apa. În lista următoare sînt date valorile *coeficientului de vîscozitate* exprimat în $10^{-1} N \cdot s/m^2$ pentru cîteva substanțe la temperatura de 20°C și la 100°C

Substanța	la 20°C	la 100°C
ulei de motor	9,86	0,17
apă	1,005	0,284
aer	181	218

Se observă că pe măsură ce temperatura crește, fluiditatea $\left(\frac{1}{\eta}\right)$ a uleiului se mărește, motiv pentru care nu este bine a ambala motoarele reci.

Observație. S-a descoperit că la 3 K heliul — II lichid nu prezintă vîscozitate, comportîndu-se ca un fluid ideal. Această stare se mai numește superfluiditate.

7.5.2. Aplicații

Ungerea. Suprafețele solide în contact se ung pentru a înlocui frecarea directă între suprafețele solide prin frecare între straturile de fluid, ceea ce micșorează frecarea.

Vehicule cu pernă de aer. Suflînd aer cu compresoare puternice se formează sub vehicul un strat (pernă) de aer care exercită o presiune suficientă pentru a compensa greutatea vehiculului în timp ce mijloace de propulsie îl deplasează. Vehiculul alunecă pe acest strat de aer, iar frecările devin neglijabile.

7.5.3. Rezistența la înaintare

Într-un fluid real existînd frecare, orice corp care se deplasează în fluid sau orice fluid care curge într-o conductă întîmpină o rezistență, generînd fenomene cu importanță deosebită în tehnică.

În acest domeniu măsurarea și descoperirea pe cale experimentală a dependențelor între diferite mărimi joacă un rol determinant. Pentru măsurări se utilizează adesea modele analoge ale sistemelor reale. Aceste încercări se fac de obicei în tunele (fig. 7.10), în care

fluidele și vitezele acestora pot fi alese și produse convenabil. Este de observat că a deplasa un corp într-un fluid este echivalent cu a

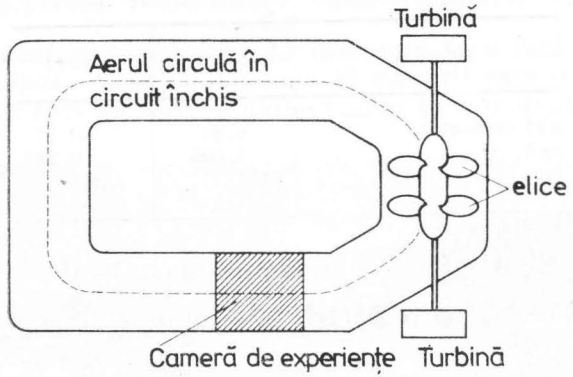


Fig. 7.10. Tunel aerodinamic.

păstra corpul în repaus și a face fluidul să curgă (fig. 7.11). Sînt de studiat trei cazuri importante.

a) *Placă așezată sub un anumit unghi.* Experiența arată că dacă viteza v este mică, placa P de arie A așezată sub un unghi α (fig. 7.12, *a*, *b*) opune fluidului, care are coeficientul de vîscozitate η, o rezistență

$$R = k\eta A v \sin \alpha \quad (7.5)$$

unde k este un coeficient de proporționalitate. Deci R este direct proporțională cu viteza. Se observă din figura 7.12, *c* că rezistența la înaintare este componenta pe direcția de mișcare a forței $\vec{F}$ care apare. Componenta normală pe viteza curentului determină o împingere a plăcii perpendicular pe această direcție. Acesta este cazul voleților submarinelor, sau ai automobilelor de curse care dau o componentă ce ajută să se mențină vasul în mișcare la o anumită adîncime (fig. 7.13) și, respectiv, să apese mașina pe pistă anihilînd

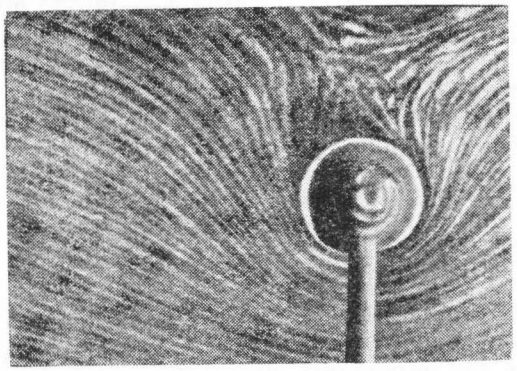


Fig. 7.11. Studiul comportării unui corp (în repaus) într-un fluid în mișcare.

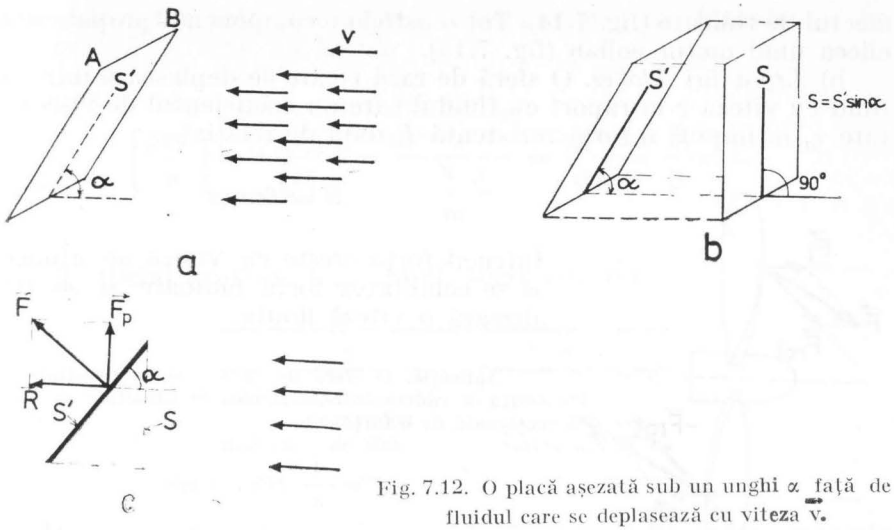


Fig. 7.12. O placă așezată sub un unghi α față de fluidul care se deplasează cu viteza $\vec{v}$.

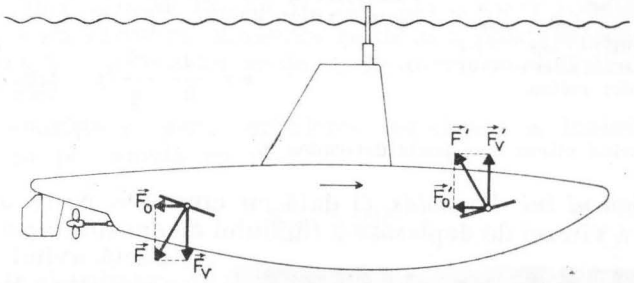


Fig. 7.13. Voleții submarinului constituie un mijloc pentru modificarea sau menținerea adîncimii de navigație prin reglarea convenabilă a componentelor $\vec{F}_o$ și $\vec{F}_v$.

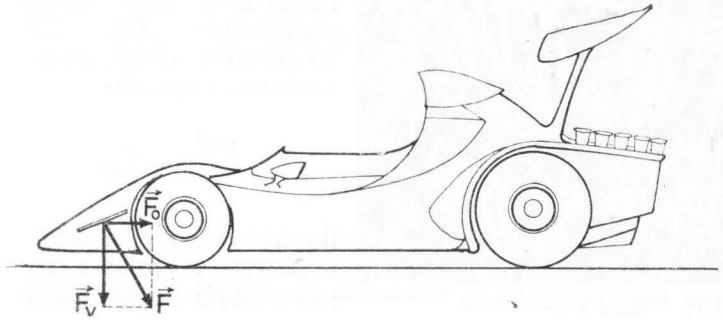


Fig. 7.14. Voletul determină componenta verticală orientată în jos.

efectul de ridicare (fig. 7.14). Tot o astfel de componentă propulsează elicea unui motor eolian (fig. 7.15).

b) *Legea lui Stokes.* O sferă de rază r care se deplasează într-un fluid cu viteza v în raport cu fluidul care au coeficientul de vîscozitate η, întîmpină o forță rezistentă R dată de relația

$$R = 6\pi r\eta v \qquad (7.6)$$

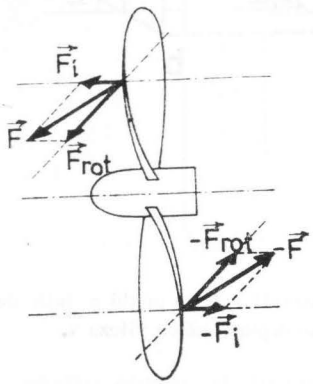


Fig. 7.15. Cuplul $\vec{F}_{rot}$, $-\vec{F}_{rot}$ pune în mișcare elicea unui motor eolian.

Întrucît forța crește cu viteza se ajunge să se echilibreze forța motoare și se realizează o viteză limită.

Aplicație. O sferă de rază r și de densitate ρ aflată în cădere într-un lichid de densitate ρ_l este acționată de o forță

$$F = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_l)g$$

echilibrată la viteza limită de forța lui Stokes (7.6). Rezultă viteza limită

$$v = \frac{2}{9}\cdot\frac{r^2}{\eta}(\rho - \rho_l)g.$$

Invers, măsurînd viteza v se poate determina η.

c) *Numărul lui Reynolds.* O dată cu creșterea peste o anumită valoare v_l a vitezei de deplasare a fluidului de densitate ρ aflat într-o conductă avînd diametrul d se produce o trecere bruscă de la scurgerea laminară la cea *turbulentă*, caracterizată prin apariția vîrtejurilor (fig. 7.16). Experimental se arată că valoarea expresiei

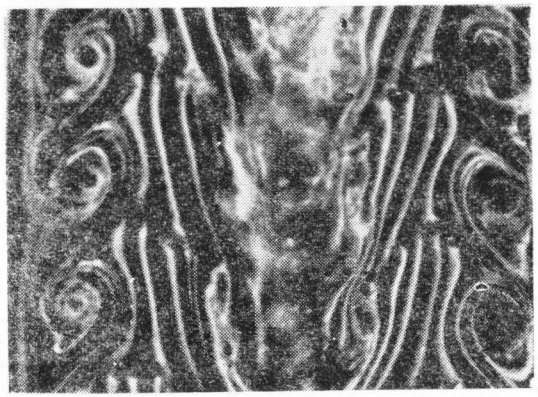


Fig. 7.16. Curgerea turbulentă.

$$\frac{\rho v d}{\eta} = N_R,$$

numit *numărul lui Reynolds*, dă posibilitatea stabilirii unor limite cantitative care diferențiază curgerea laminară de cea turbulentă. Se observă că N_r este un număr:

$$\left[\frac{\rho v d}{n}\right] = \frac{[\rho][v][d]}{[n]} = \frac{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\text{m}}{\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}} = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2\text{N}} = \frac{\text{N}}{\text{N}} = 1.$$

În tabelul următor se exprimă acest criteriu

N_R	curgerea
mai mic de 2000	laminară
2000—3000	posibilă oricare
mai mare de 2000	turbulentă

Două sisteme fizice sînt analoge din punct de vedere dinamic dacă au același număr Reynolds. Pe baza acestor considerente s-a creat teoria similitudinii dinamice și, de aici, posibilitatea modelării la scară mică a sistemelor reale și studierea modelării în tunelele aerodinamice.

După apariția curgerii turbulente rezistența la înaintare crește și devine proporțională cu v^2.

$$R = k\rho S v^2 \qquad (7.7)$$

unde ρ este densitatea mediului, iar S aria sub care se vede corpul pe direcția de mișcare, iar k este un număr. Într-adevăr, din relația (7.7) rezultă

$$k = \frac{R}{\rho v^2 S} \text{ și aplicînd unitățile } [k] = \frac{[R]}{[\rho][v^2][S]} = \frac{N}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\cdot\text{m}^2} =$$

$$= \frac{\text{N}}{\text{N}} = 1.$$

Coeficientul k depinde de forma corpului a cărui rezistență se calculează, se numește *coeficient de rezistență a corpului în regim turbulent* sau *constantă aerodinamică* și se determină experimental în

tunelul aerodinamic (fig. 7.10) prin experimente efectuate cu balanța aerodinamică (fig. 7.17, a) cu corpuri de aceeași secțiune maximă normală S, dar de forme diferite (fig. 7.17, b).

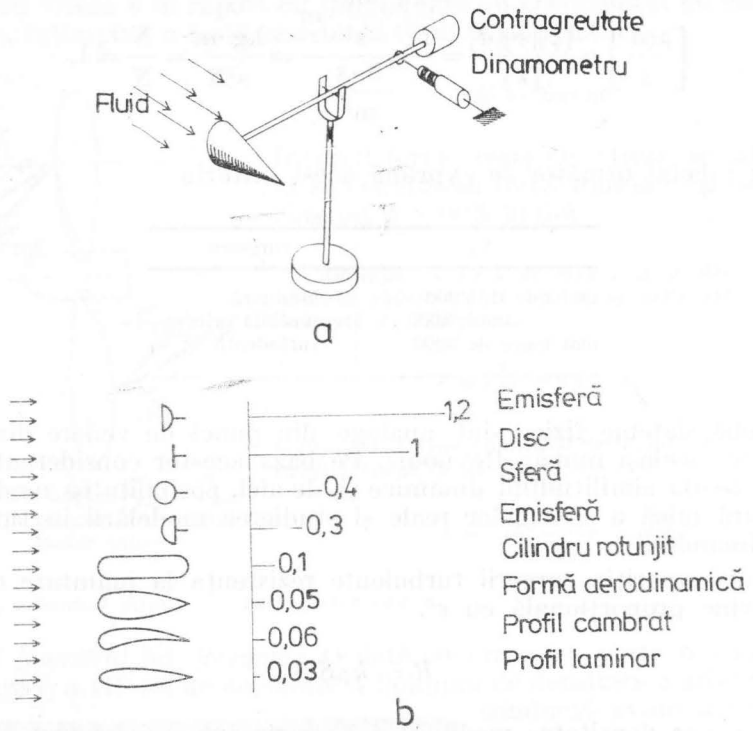


Fig. 7.17. Balanța aerodinamică, un instrument cu care se determină în tunelul aerodinamic, rezistența la înaintare (a). Diagramă de rezultate (b).

Se observă că în raport cu profilul disc, luat ca unitate, profilul emisferă este cel căruia i se opune rezistența cea mai mare, iar profilul laminar înaintează cel mai ușor.

7.5.4. Aplicații

a) *Parașuta* are de regulă profilul 1 (fig. 7.17, b) cel mai rezistent la înaintare. După lansare și deschiderea parașutei, rezistența devine foarte mare și frînează căderea. Există o viteză limită, suportabilă pentru parașutist la contactul cu solul, la care greutatea este

egală cu forța rezistentă, caz în care parașutistul coboară uniform cu această viteză.

b) Pentru învingerea forțelor de frecare se efectuează un lucru mecanic ceea ce duce la creșterea consumului de combustibil și la limitarea vitezei. Problema micșorării frecărilor cu aerul este esențială la vehicule de mare viteză cum sînt autoturismele, trenurile, aeronavele. La aceste vehicule se încearcă să se ajungă la forma cît mai apropiată de profilele *6—8*. Profilul *6* se numește *formă aerodinamică*. Corpul peștilor și al păsărilor se apropie cel mai mult de acest profil.

c) *Aripa de avion*. În figura 7.18, a se arată spectrul aerodinamic al unui profil cambrat din figura 7.17. Se observă situația

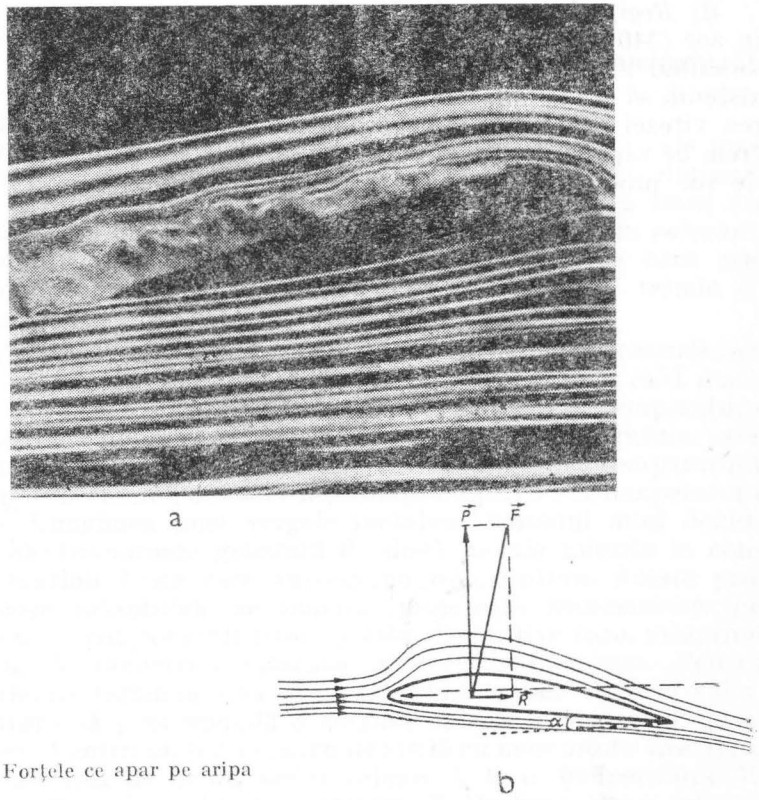


Fig. 7.18. Forțele ce apar pe aripa de avion.

asimetrică a curgerii fluidului pe cele două fețe ale profilului. Pe fața superioară presiunea statică este mai mică decît pe cea inferioară,

chiar pentru unghiuri de atac α nule sau negative ($\alpha = -5°$). Ca urmare a diferenței de presiune apare forța $\vec{F}$ care are două componente : un averticală ($\vec{P}$), *portanța* — forța care are tendința de a ridica aripa și rezistența la înaintare $\vec{R}$, care frînează înaintarea (fig. 7.17, *b*).

Pentru profile de tipul laminar 8 (fig. 7.17, b) portanța este suficientă numai la viteze mari ; în schimb rezistența la înaintare este mai mică. La avioanele de mare viteză aripa are suprafața și profilul reglabile, voleți suplimentari fiind acționați de piloți în funcție de viteza aparatului. La decolare și aterizare (viteze mai mici) se suplimentează portanța prin deschiderea voleților, iar la viteze mari voleții sînt pliați.

d) *Regimul supersonic.* La viteze apropiate de viteza sunetului în aer (340 m/s) rezistența la înaintare depinde direct proporțional de cubul vitezei $R \approx v^3$, pentru ca o dată depășită bariera sonică rezistentă să scadă din nou pînă la a fi proporțională cu v^2. Depășirea vitezei sunetului pune problema unor variații de solicitări extrem de rapide, deoarece vehiculul trebuie să treacă printr-o undă de șoc produsă de propriul zgomot.

8

PROCESE TERMICE

8.1. Noțiunea de temperatură. Măsurarea temperaturii

Punînd în contact mai multe corpuri încălzite diferit cele mai calde se răcesc, iar cele mai reci se încălzesc. Acest proces durează pînă cînd corpurile ajung la *echilibru termic*. O anumită stare de echilibru termic a mai multor corpuri se poate descrie prin *noțiunea de temperatură*, temperatura unui corp fiind o mărime care are aceeași valoare pentru toate corpurile puse în contact termic și ajunse la echilibrul termic.

Cînd atingem un corp, senzorii noștri pentru temperatură ne determină să spunem dacă corpul este mai rece sau mai cald decît corpul nostru. Cînd corpul ne pare mai rece, spunem că temperatura lui este mai scăzută, iar cînd este mai cald, că temperatura este mai ridicată. Dar există proprietăți care depind de temperatură și care ne pot da în mod obiectiv informații cu privire la temperatura unui corp. Lungimea unei vergele metalice, volumul unui lichid, tensiunea electromotoare generată de două metale diferite în contact sînt mărimi fizice care variază cu temperatura. Aceste proprietăți fizice măsurabile se numesc *proprietăți termometrice*. Pe această bază se pot construi *termometrele*, dispozitive care, măsurînd proprietatea termometrică, măsoară indirect temperatura. Pentru ca o proprietate termometrică să fie folosibilă trebuie ca unei valori a temperaturii să-i corespundă o singură valoare a acestei proprietăți și invers. Pentru un termometru de sticlă cu mercur, de exemplu, lungimea coloanei de lichid are o valoare l_0 la o temperatură T_0 (fig. 8.1) și altă valoare l la temperatura T. Pentru a putea măsura temperatura este însă necesară o *scară de temperatură* care să ne dea unitatea.

Stabilirea unei scări se face prin alegerea unui *punct fix de temperatură*. Acest lucru este posibil deoarece există stări care se mențin neschimbate în anumite condiții de presiune și temperatură. Astfel, o substanță se poate prezenta în toate cele trei faze (solidă, lichidă și gazoasă) în echilibru și se menține astfel numai dacă presiunea și temperatura au anumite valori. Această stare este reproductibilă dacă condițiile sînt reproduse identic. Cu alte cuvinte, ori de cîte ori reproducîndu-se condiția de presiune și constatîndu-se existența echilibrului celor trei faze se poate afirma că temperatura este aceeași. Un exemplu este *punctul triplu* al apei care se produce la 4,58 torri și 0,01°C. În vederea realizării acestui punct triplu se construiește o celulă în care sînt îndeplinite condițiile precedente (fig. 8.2). Apa pură este introdusă într-o celulă din care s-a scos aerul, vaporii formați rămîn în echilibru cu apa și gheața formată ca urmare a scufundării celulei de amestec de apă și gheață. Termometrul care urmează a fi etalonat se introduce în spațiul din mijloc. În acest mod, se obține un punct fix de temperatură. Temperatura în acest punct este aleasă în mod arbitrar egală cu 273,16 K, adică unitatea de măsură este, conform hotărîrii Conferinței Generale de Măsuri și Greutăți (1968), kelvinul (K) definit ca fracțiunea $\frac{1}{273,16}$ din temperatura termodinamică a punctului triplu al apei.

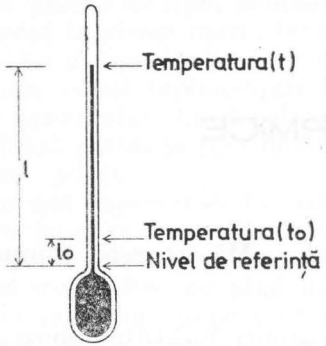


Fig. 8.1. Lungimea coloanei de mercur, o proprietate termometrică.

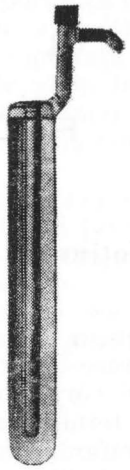


Fig. 8.2. O celulă standard care realizează punctul triplu al apei.

La temperatura punctului triplu al apei 273,16 K, lungimea coloanei de lichid a termometrului de sticlă cu mercur, de exemplu, este l_0. Relația

$$\frac{T}{273,16} = \frac{l}{l_0}$$

dă posibilitatea de a determina temperatura t în funcție de raportul $\frac{l}{l_0}$ al lungimilor coloanelor de lichid la o temperatură oarecare t și la temperatura 273,16 K

$$T = 273,16 \frac{l}{l_0}.$$

Astfel, termometrul este etalonat.

Temperatura este o mărime scalară.

Comparată cu această scară temperatura de zero grade Celsius (0°C) este de 0,01 kelvini, intervalul de 1°C fiind identic cu intervalul 1 K. Transformarea temperaturii T din kelvini în temperatura t exprimată în grade Celsius se face prin relația *

$$t = T - 273,15 \text{ K}. \tag{8.1}$$

Pe scara Celsius gheața se topește la presiune normală la 0°C, iar apa fierbe la 100°C la aceeași presiune. Aceleași puncte sînt marcate pe scara Fahrenheit (utilizată mult în țările anglo-saxone și în special în America de Nord) cu +32°F și 212°F. Relația următoare dă posibilitatea transformării din °F în °C

$$t(°C) = \frac{5}{9}\left[t(°F) - 32\right].$$

8.2. Mijloace de măsurare a temperaturii

Mijloacele cu care se măsoară temperatura au construcție diferită corespunzătoare domeniului de temperatură care este măsurat. Un dispozitiv de acest fel este de fapt un *traductor* care convertește temperatura într-o altă mărime fizică măsurabilă direct. Enumerăm cîteva tipuri:

* Întrucît $\Delta t = \Delta T$, se mai notează intervalul de un grad cu grd.

a) mijloacele bazate pe dilatarea corpurilor. *Exemple*: termometre de sticlă cu lichid și termometre metalice;

b) mijloace bazate pe variația rezistenței electrice cu temperatura. *Exemple*: termometrele cu rezistența și termistoarele;

c) mijloace bazate pe variația tensiunii termoelectrice cu temperatura. *Exemple*: termocuplele;

d) mijloace care au la bază legile radiației termice. *Exemple*: pirometrele optice, de radiație, de culoare și fotoelectrice.

Descriem din prima categorie cîteva termometre din sticlă cu lichid.

Domeniul de utilizare este cel înscris în tabelul următor.

Lichidul	Limitele de temperatură (°C)	
	inferioară	superioară
Mercur	−35	300
Toluen	−80	100
Alcool etilic	−110	70
Pentan	−200	20

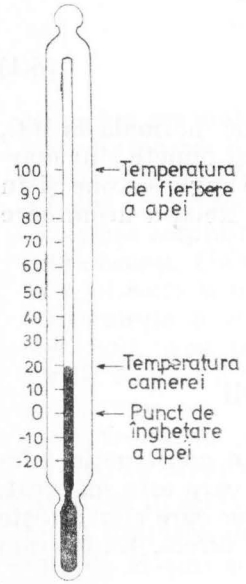


Fig. 8.3. Un termometru de laborator.

Sticla din care este confecționat termometrul trebuie să reziste la șocuri termice și să aibă un coeficient de dilatație redus.

În figura 8.3 este desenat un termometru de acest fel folosit în laborator. La termometrul de laborator ca și la alte termometre destinate măsurării precise, scara este gradată cu diviziuni marcînd intervale cuprinse între 0,5°C și 0,01°C.

Termometrul tehnic are o construcție asemănătoare dar e montat într-o armătură metalică de protecție. În general, scările acestor termometre au diviziuni marcînd intervale cu valori între 0,5°C și 10°C, precizia cerută nefiind prea mare.

Pentru observații meteorologice se construiesc termometre de maximă și minimă (fig. 8.4). În cel de maximă (*a*) un indice aflat în tub în afara mercurului este împins de coloana de lichid. Cînd temperatura scade indicele rămîne pe loc, arătînd temperatura cea mai mare atinsă între două citiri succesive. În termometrul de minimă (*b*) indicele

(*c*) aflat în interiorul coloanei de alcool este antrenat de stratul superficial cînd lichidul se contractă. Cînd temperatura crește indicele rămîne pe loc arătînd cea mai scăzută valoare atinsă în intervalul de timp dintre două citiri.

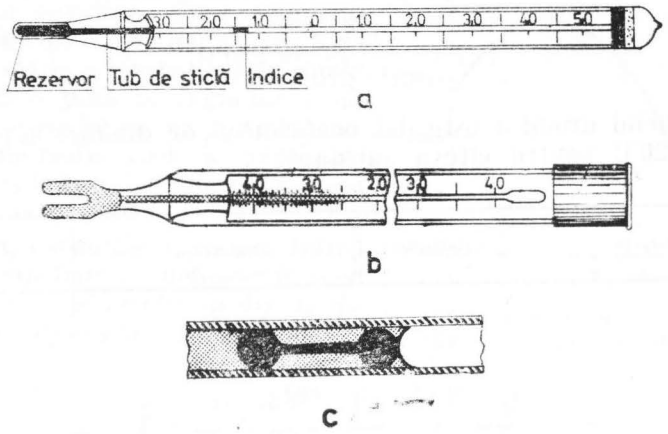


Fig. 8.4. Termometre meteorologice de maximă (*a*) și minimă (*b*). Indicele pentru (*b*).

Un termometru de maximă este și cel medical, gradat între 35°C și 42°C, la care mercurul poate, la creșterea temperaturii, trece în capilar printr-o gîtuitură a rezervorului, dar nu poate reveni în rezervor decît prin scuturare energică.

Alte metode și mijloace de măsurare a temperaturii vor fi descrise ca aplicații ale altor procese în diferite locuri ale acestei lucrări.

8.3. Dilatarea solidelor și lichidelor

Prin modificarea temperaturii la presiune constantă, volumul unui corp variază. Pentru descrierea acestui proces se introduce coeficientul mediu de dilatare în volum (la presiune constantă)

$$\overline{\gamma} = \frac{\Delta V}{\Delta T \cdot V_0} \tag{8.2}$$

unde ΔV este variația volumului inițial V_0 la o variație mică ΔT a temperaturii*. Semnificația coeficientului este variația unității de volum V/V_0 pentru un interval de temperatură egal cu un grad. Această mărime este o caracteristică a unei anumite substanțe, dar variază cu temperatura. Unitatea de măsură este

$$[\gamma] = \frac{\text{m}^3}{\text{m}^3 \cdot \text{grd}} = \text{grd}^{-1}.$$

În tabelul următor este dat coeficientul de dilatare la temperatura de 20°C pentru cîteva substanțe.

Substanța	$\bar{\gamma}(10^{-5}\cdot\text{grd}^{-1})$	Substanța	$\bar{\gamma}(10^{-5}\cdot\text{grd}^{-1})$
Aluminiu	7,2	alcool etilic	75
Cupru	4,2	glicerina	49
Oțel	3,6	mercur	18
Invar	0,27	apă	18

Se observă că mercurul, dilatîndu-se mai puțin decît alcoolul etilic, termometrele care au mercur sînt mai puțin sensibile decît cele cu alcool etilic.

Cînd corpul are o cavitate atunci el se dilată ca și cum această cavitate n-ar exista. Este cazul vaselor cu pereți subțiri la care se poate considera dilatarea ca și cum volumul închis ar fi plin cu un material de același fel. La măsurări precise ale temperaturii este necesar să se țină seamă de dilatarea rezervorului și capilarului, adică să se introducă corecții. În general, volumul crește cu temperatura. Dacă V_0 este volumul la 0°C, iar V la o anumită temperatură t rezultă din definiția (8.2) că

$$V = V_0(1 + \bar{\gamma}t).$$

Ca urmare densitatea scade cu temperatura

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_0(1 + \bar{\gamma}t)} = \frac{\rho_0}{1 + \bar{\gamma}t}.$$

* S-a notat $\bar{\gamma}$ (gamma mediu) cu scopul de a arăta că întrucît depinde de temperatură și este definit pentru un interval de temperatură valoarea înscrisă este o valoare medie.

La apă se constată o abatere de la regula creșterii volumului cu temperatura. În intervalul de temperatură cuprins între 0°C și 4°C coeficientul $\bar{\gamma}$ este negativ. Comportarea particulară a apei în intervalul arătat are o importanță deosebită pentru viața plantelor și animalelor acvatice. Cînd temperatura scade sub 4°C densitatea apei (fig. 8.5) scade și straturile reci rămîn la suprafață pînă la înghețare, iar gheața care se formează plutește, izolînd termic restul apei de aerul atmosferic și ferind de îngheț total apa din riuri sau lacuri.

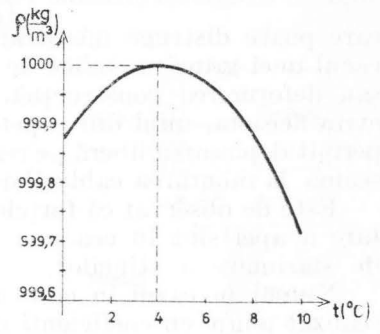


Fig. 8.5. Comportarea densității apei în jurul temperaturii de 4°C.

Pentru corpurile care au forma de plăci sau bare se definesc în mod asemănător *coeficienții medii de dilatare în suprafață* ($\bar{\beta}$) și *liniară* $\bar{\alpha}$:

$$\bar{\beta} = \frac{1}{S_0} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t}, \qquad \bar{\alpha} = \frac{1}{l_0} \frac{\Delta l}{\Delta t} \tag{8.3}$$

cu semnificațiile următoare: variația unității de arie pe intervalul de un grad și, respectiv, variația unității pe lungime pe același interval de temperatură. Se poate arăta că $\bar{\beta} = \frac{2\bar{\gamma}}{3}$ și $\bar{\alpha} = \frac{\bar{\gamma}}{3}$.

Dacă lungimea unei bare este la 0°C l_0, iar la t°C l urmează, aplicînd definiția lui $\bar{\alpha}$, că

$$l = l_0\ (1 + \bar{\alpha}t).$$

Atît $\bar{\beta}$ cît și $\bar{\alpha}$ se exprimă în grd^{-1} așa cum se vede aplicînd unitățile în relațiile de definiție (8.3).

Aplicație. În cazul împiedicării dilatării unei bare sau contractării unui fir, apar forțe de compresiune sau de întindere care au importanță mare pentru securitatea diferitelor instalații sau construcții.

Fie o bară încastrată la temperatura 0°C. La temperatura t lungimea barei va varia cu $\Delta l = l_0\ \bar{\alpha}\Delta t$, unde l_0 este lungimea barei la 0°C, iar $\bar{\alpha}$ coeficientul de dilatare liniară. Împiedicînd procesul,

se crează o forță F, care poate fi de compresiune sau de întindere (v. relația (4.5)

$$F = E\frac{\Delta l \cdot S}{l_0} = E\ S\bar{\alpha}(t_1 - 0);$$

care poate distruge încastrarea sau încovoia bara. De exemplu, în cazul unei grinzi metalice de pod care ar fi încastrată, s-ar produce sau deformarea construcției, sau distrugerea reazemelor. Pentru a evita aceasta, unul din capete se sprijină pe un sistem de role, care permit deplasarea liberă pe reazem (fig. 8.6). De același proces se ține seama la montarea cablurilor aeriene, a șinelor de cale ferată.

Este de observat că forțele imense care apar în procesul de înghețare a apei sînt în cea mai mare parte răspunzătoare de acțiunea de sfărîmare a stîncilor.

Numai în cazul în care $\bar{\alpha}$ este mic forța este neglijabilă. S-au realizat aliaje cu coeficienți de dilatare mici. În figura 8.7 este dat graficul variației lui $\bar{\alpha}$ pentru aliajul dintre oțel și nichel. Se observă că pentru 36% Ni, $\bar{\alpha}$ are un minim. Aliajul cu acest procentaj se numește *invar*, numele arătînd că este vorba de un material ale cărui dimensiuni nu variază cu temperatura.

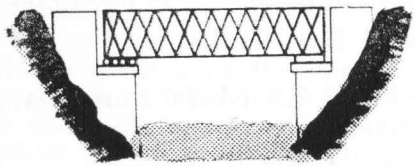


Fig. 8.6. Capătul unui pod metalic este liber să se deplaseze.

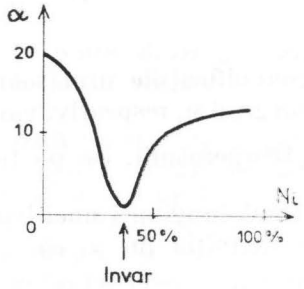


Fig. 8.7. Variația lui α cu compoziția a unui aliaj. Oțel cu nichel.

8.4. Căldura și lucrul mecanic

Transferul energiei între un sistem și mediul înconjurător poate fi făcut pe două căi prin *căldură* și *lucrul mecanic*. Aceste două mărimi fizice caracterizează deci procesul de cedare și primire de energie de către un sistem, motiv pentru care se numesc mărimi de proces.

a) Considerăm două corpuri dintre care unul la temperatura T_1, iar celălalt la temperatura T_2 pe care le punem în contact. În acest caz corpul mai cald cedează energia celui mai puțin cald și, așa cum s-a mai spus (fig. 8.8, a), acest transfer durează pînă la realizarea echilibrului termic, cînd temperaturile se egalează (fig. 8.8, b).

Transferul de energie efectuat exclusiv datorită diferenței de temperatură se numește *căldură schimbată*.

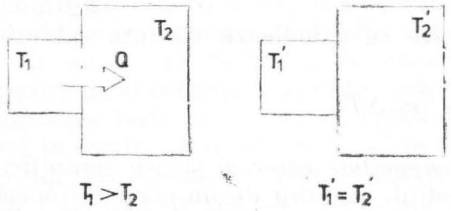


Fig. 8.8. Transferul energiei prin căldură.

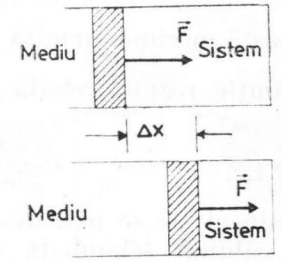


Fig. 8.9. Transferul energiei prin lucru mecanic.

b) Avem acum în vedere că interacțiunea între sistem și mediu înconjurător se realizează exclusiv prin intermediul unei forțe al cărei punct de aplicație se deplasează. Se efectuează un lucru mecanic (fig. 8.9).

O aceeași variație de energie poate fi produsă prin ambele procese. Măsurînd variații de energie, atît căldura cît și lucrul mecanic se măsoară în unități de energie

$$[Q] = J.$$

8.5. Căldura specifică. Capacitatea calorică

Se dovedește experimental că pentru a modifica temperatura mai multor corpuri omogene* de aceeași masă, dar din substanțe diferite, căldura schimbată cu exteriorul este diferită.

Pentru a descrie cantitativ procesul de schimb de căldură este necesar să se introducă o mărime care să exprime această dependență de substanță. Împărțind căldura Q schimbată pentru a ridica temperatura unui corp cu masa m dintr-o anumită substanță pe

* În această carte, în privința căldurii specifice, nu se vor discuta corpurile neomogene.

intervalul de temperatură ΔT și la masa m se obține căldura necesară pentru a modifica temperatura unității de masă cu un grad

$$c = \frac{Q}{m\Delta t}. \tag{8.4}$$

Această mărime, numită *căldură specifică*, se măsoară în $\frac{J}{kg \cdot k}$. Din definiție rezultă relația prin care se calculează căldura schimbată

$$Q = mc\Delta T. \tag{8.4'}$$

Produsul mc se mai numește *capacitate calorică* și are semnificația de căldură schimbată cu mediul exterior de un corp de masă m pentru a-și modifica temperatura cu un grad.

În tabelul următor sînt înscrise căldurile specifice pentru cîteva substanțe solide și lichide:

Substanța	Temperatura [°C]	$c\left[\frac{J}{kg.k}\right]$
Alamă	0	368
Plumb	0	125
Argint	0	235
Aluminiu	0	895
Cupru	0	395
Gheață	−250	150
	−160	1000
	− 20	2000
	0	2100
Apă	0	4185

Căldurile specifice depind de temperatura la care sînt determinate. Din tabel se vede acest fapt pentru gheață.

Se mai observă că pentru apă căldura specifică este una din cele mai mari. Această caracteristică are implicații deosebite pentru climatul regiunilor de la țărmul mărilor și oceanelor, apa avînd un rol de reglare a temperaturii: primește căldura din mediul înconjurător cînd acesta are temperatura mai ridicată și cedează căldură mediului cînd temperatura acestuia este mai scăzută. Acest schimb este important tocmai datorită capacității calorice mari a apei.

8.6. Transferul căldurii

Transferul energiei prin căldură comportă trei moduri diferite: prin *conducție*, *convecție* și *radiație*.

Conducția este un mod de transmitere a căldurii important în special la solide. Prin conducție se înțelege procesul prin care agitația termică, mai intensă într-o anumită regiune a unui corp solid, se transmite din aproape în aproape spre alte regiuni. În acest proces nu se realizează transport de substanță, avînd în vedere că agitația termică a rețelei metalice constă în oscilațiile ionilor în jurul pozițiilor lor de echilibru relativ stabile.

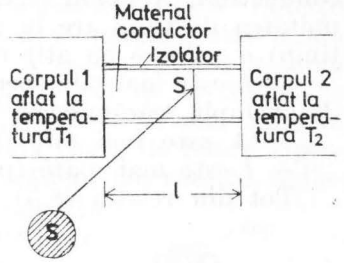


Fig. 8.10. Conducția căldurii.

În tehnică este necesar să se considere viteza de transmitere a căldurii, aceasta măsurîndu-se prin căldura schimbată în unitatea de timp între două corpuri aflate la temperaturi diferite. De exemplu (fig. 8.10), dacă singura cale pe care se schimbă căldura între cele două corpuri de temperaturi T_2 și T_1 ($T_2 > T_1$) este o bară de arie S și lungime l, construită dintr-un material solid, căldura Q_0 schimbată în unitatea de timp este dată relația

$$Q_0 = k\,\frac{A(T_2 - T_1)}{l}, \tag{8.5}$$

k fiind un coeficient care depinde de natura materialului și care se numește *conductivitate termică*.

În tabelul următor se dau valorile conductivității termice pentru cîteva materiale:

	Substanța	$k\left[\frac{J}{m.grd}\right]$
1	Argintul	$41,38 \cdot 10^{-2}$
	Cuprul	$38,45 \cdot 10^{-2}$
	Plumbul	$34,69 \cdot 10^{-2}$
	Oțelul	$4,59 \cdot 10^{-2}$
2	Azbest	$8,36 \cdot 10^{-5}$
	Plută	$16,72 \cdot 10^{-5}$
	Sticla	$8,36 \cdot 10^{-4}$
	Lemnul	$8,36 \cdot 10^{-5}$
	Aerul	$23,82 \cdot 10^{-6}$
	Oxigenul	$23,40 \cdot 10^{-6}$

Se observă că substanțele din grupa 1 — metalele — sînt foarte conductibile. Relația (8.5) rămîne valabilă pentru calculul transferului căldurii și printr-o placă (un perete), cu condiția menținerii diferenței de temperatură constantă și a unei forme geometrice, care să permită corespondența mărimilor ce intervin în această relație.

Aplicație. Zidul, un element de construcție izolant, este totuși conductibil. Aplicînd legea (8.5), Q_0 căldura transmisă prin zid în unitatea de timp are în regim permanent ($T_2 - T_1$ = constant în timp) o valoare cu atît mai mică cu cît:

— k este mai mic (peretele are calități termoizolante mai bune, de exemplu, cărămida și betonul celular care conțin aer);

— A este mai mic (suprafața expusă este mai redusă);

— l este mai mare (peretele este mai gros).

Tot din relația (8.5) se observă, scriind-o sub forma

$$T_2 - T_1 = \frac{Q_0}{kA} \cdot l,$$

că între cele două fețe temperatura variază liniar cu grosimea zidului, dacă materialul din care este construit zidul este omogen.

Convecția. În fluide, odată cu creșterea locală a temperaturii se produce o dilatație regională a fluidului densitatea lui scăzînd. În acest mod se modifică echilibrul în cîmpul gravitațional, volumul de fluid încălzit ridicîndu-se. Se determină astfel o circulație a fluidului. Fluidul deplasat este înlocuit cu fluid din alte părți, curentul total putînd avea forme diferite între care și aspectul unui circuit închis.

Convecția explică circulația aerului la scara globului pămîntesc și vînturile locale. Pentru exemplificare, în figura 8.11 se ilustrează

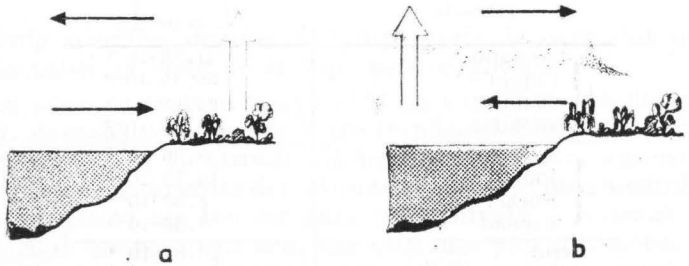


Fig. 8.11. Formarea brizei.

formarea brizei. Aerul (încălzit puternic în contact cu solul în timpul zilei se ridică și creează o depresiune care pune în mișcare masele de aer aflate în contact cu suprafața mării (fig. 8.11). Astfel, briza suflă în timpul zilei dinspre mare spre uscat (fig. 8.11, a). Noaptea, circulația se face în sens invers, depresiunea formîndu-se la suprafața apei deoarece apa se răcește mai greu. (fig. 8.11, b)

Radiația. Energia electromagnetică se transmite prin radiații electromagnetice de frecvență diferită, care se propagă sub forma undelor electromagnetice fără a avea nevoie de substanță. Un exemplu în această privință este radiația primită de noi de la Soare. În aproximativ 9 minute radiația solară ajunge pe planeta noastră care primește aproximativ $2 \cdot 10^{-9}$ din energia emisă de Soare. Spectrul radiației solare cuprinde, în ordinea scăderii frecvenței: radiație γ, X, ultravioletă, vizibilă și infraroșie. În această ultimă parte se află peste 50% din energia primită de Pămînt.

Radiația electromagnetică, fiind o undă, interacționează cu mediul producîndu-se toate procesele legate de propagare. Ea este absorbită, reflectată, refractată, difuzată. Absorbția radiației are printre alte efecte și încălzirea corpului. În special radiația infraroșie produce efecte termice. În continuare dăm o aplicație cunoscută.

Vasul Dewar (fig. 8.12), care este construit special pentru a avea proprietăți termoizolante foarte bune, realizează reducerea la minim a schimbului de căldură pe cele trei căi. Între pereți se face un vid înaintat (se elimină conducția și convecția), iar pereții sînt lustruiți și argintați (se obține o reflexie maximă a radiației).

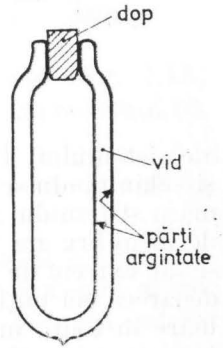


Fig. 8.12. Vas Dewar

8.7. Starea unui sistem; schimbarea de stare

Izolînd un corp sau mai multe de mediul înconjurător alcătuim un sistem de masă m, care ocupă un volum V, la o presiune p și o temperatură T. Afirmînd acest lucru înțelegem că presiunea, respectiv temperatura sînt aceleași în orice punct al corpului, adică sistemul este în stare de echilibru. Dacă sistemul e izolat, parametrii p, V și T rămîn constanți și caracterizează deci acea stare a sistemului

care poate fi reprezentată într-un sistem de coordonate p, V, T, în plan sau în spațiu (fig. 8.13, a).

Printr-o interacțiune cu un alt sistem corpul își schimbă starea, adică, masa rămînînd constantă se modifică, cel puțin unul din parametrii de stare. În figura 8.13, b sînt reprezentate două stări

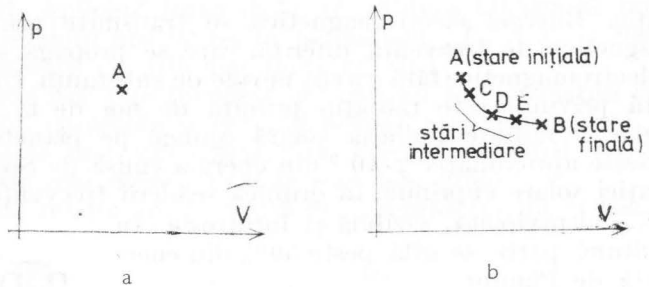


Fig. 8.13. Schimbare de stare cu trecere prin stări intermediare de echilibru.

ale sistemului. În această interacțiune, efectuindu-se lucru mecanic și schimbîndu-se căldură, parametrii nu se modifică brusc în toată masa sistemului; stările de tranziție pînă la realizarea unei noi stări de echilibru nu pot fi stări de echilibru decît dacă transformările se fac extrem de încet. O *stare de neechilibru* nu poate fi reprezentată, deoarece cel puțin unul din parametrii (p sau T) nu are aceeași valoare în toată masa. Pe figura 8.13, b este reprezentat procesul de trecere prin stări de echilibru între două stări.

În cele ce urmează se vor avea în vedere numai transformări care se fac trecînd sistemul prin stări de echilibru.

Într-o stare dată, parametrii p, V, T ai unei mase m de substanță pură sînt legați între ei printr-o relație care se numește *ecuație de stare*.

În paragraful următor se vor exemplifica aceste elemente pe un sistem numit gaz ideal pentru care ecuația de stare este simplă.

8.7.1. Gazul ideal. Transformări particulare

Nu există un anume gaz ideal, ci o comportare ideală a gazului Orice gaz care se află la o presiune scăzută poate fi considerat ideal. Motivele acestei denumiri vor fi înțelese mai tîrziu.

Fie un cilindru (fig. 8.14) în care este închis cu un piston un gaz cu masa m. Presiunea și temperatura pot fi măsurate cu un manometru, respectiv cu un termometru, iar volumul prin metode diferite. Putem să-i modificăm starea împingînd pistonul sau încălzind gazul sau combinînd cele două moduri. În cel mai general caz, gazul trece de la starea cu parametrii p_1, V_1 și T_1 la starea cu parametrii p_2, V_2, T_2. Variind toți parametrii transformarea se numește *generală*. În cazul în care unul rămîne constant transformarea este *particulară*: *izotermă* (T = const.), *izobară* (p = const.) și *izocoră* (V = const.).

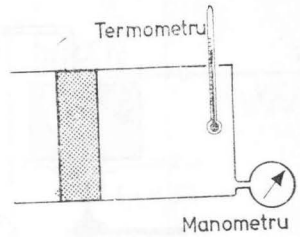


Fig. 8.14. Un sistem termodinamic: un gaz închis într-un cilindru cu piston.

Vom studia pe rînd cele trei transformări particulare. Legile au un caracter experimental.

Transformarea izotermă. Comprimînd izoterm gazul (fig. 8.15, a) și măsurînd concomitent presiunea p și volumul V se constată că

$$pV = \text{const.} \tag{8.6}$$

Transformarea se poate face înlocuind un perete al cilindrului cu un perete permeabil la schimbul de căldură între sistem și un *termostat*, un corp a cărui temperatură nu variază sensibil prin cedare

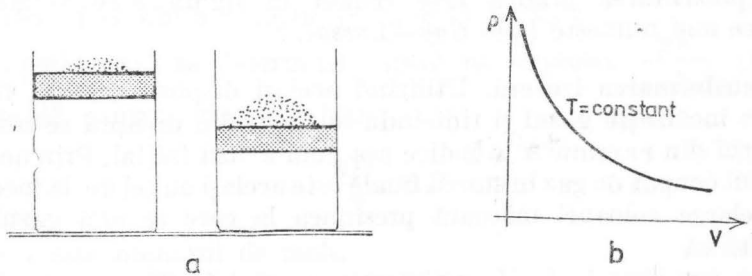


Fig. 8.15. Transformarea izotermă.

sau primire de căldură. Reprezentarea grafică a transformării descrisă de relația (8.6), cunoscută sub numele de *legea Boyle-Mariotte*, este redată în figura 8.15, b.

Transformarea izobară. Gazul închis în balon (fig. 8.16, a) este încălzit sau răcit. Inițial, nivelul mercurului din tuburi este același, deci presiunea gazului este cea atmosferică. Denivelarea

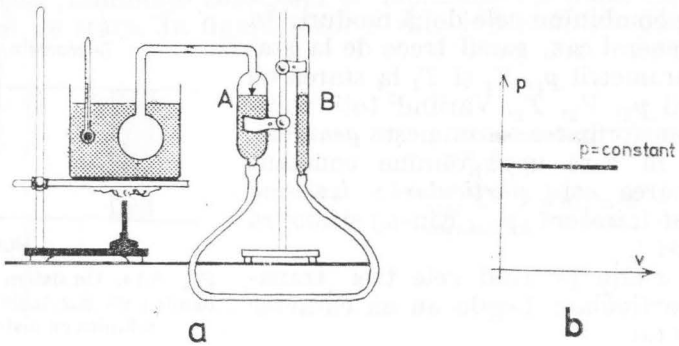


Fig. 8.16. Transformarea izobară.

produsă prin variația presiunii cu temperatura este eliminată prin coborîrea sau ridicarea ramurii B. În acel moment presiunea gazului revine la valoarea inițială, cea atmosferică. Se constată că

$$\frac{V}{T} = \text{const.} \tag{8.7}$$

Reprezentarea grafică este redată în figura 8.16, b. Relația (8.7) se mai numește *legea Gay—Lussac*.

Transformarea izocoră. Utilizînd același dispozitiv ca în figura 8.16 se încălzește gazul și ridicîndu-se tubul din dreapta se readuce mercurul din ramura A la indice așa cum a fost inițial. Prin aceasta volumul ocupat de gaz în starea finală este același cu cel de la început. Denivelarea coloanei măsoară presiunea la care se află gazul. Se constată că

$$\frac{p}{T} = \text{const.} \tag{8.8}$$

Reprezentarea grafică este o semidreaptă paralelă cu axa presiunii. Relația (8.8) se mai numește *legea lui Charles*.

8.7.2. Transformarea generală. Ecuația de stare

Trecerea unui gaz de masă m de la starea inițială (1) caracterizată prin parametrii p_1, V_1, T_1 la starea finală (2), p_2, V_2, T_2 (fig. 8.17) se poate face pe cale particulară, urmînd o succesiune de două transformări, una izocoră și una izobară, de exemplu. Pentru prima transformare, conform legii lui Charles, se scrie

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_1'},$$

iar pentru a doua, conform legii Gay-Lussac,

$$\frac{V_1}{T_1'} = \frac{V_2}{T_2}$$

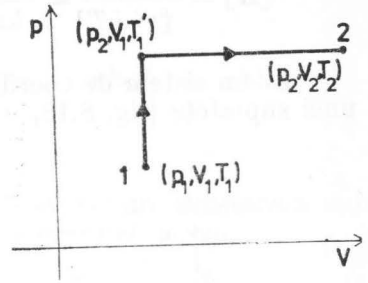


Fig. 8.17. Transformarea generală realizată printr-una particulară.

Eliminînd T_1' între cele două relații se obține

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$$

adică

$$\frac{pV}{T} = \text{const.} \tag{8.9}$$

Aceasta este *legea generală a gazului ideal*. Este de observat că particularizînd se obțin relațiile (8.6), (8.7) și (8.8).

Experimental se determină faptul că expresia $\frac{pV}{\nu T}$ este o constantă pentru orice gaz ideal

$$\frac{pV}{\nu T} = R$$

unde ν este numărul de moli.

De aici rezultă că între parametrii p, V, T ai unui gaz aflat în condiții ideale într-o stare dată există următoarea relație de legătură

$$pV = \nu RT \tag{8.10}$$

numită *ecuație de stare*.

Valoarea constantei R, numită *constanta universală a gazelor*, determinată experimental este 8,310 J/mol·K. Unitatea rezultă din relaţia precedentă

$$[R] = \frac{[p]\,[V]}{[\nu]\,[T]} = \frac{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\cdot \mathrm{m}^3}{\mathrm{kmol}\cdot \mathrm{K}} = \frac{\mathrm{N}\cdot \mathrm{m}}{\mathrm{kmol}\cdot \mathrm{K}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kmol}\cdot \mathrm{K}}.$$

Într-un sistem de coordonate p, V, T relaţia (8.10) este ecuaţia unei suprafeţe (fig. 8.18, *a*), care — dacă este tăiată cu plane paralele

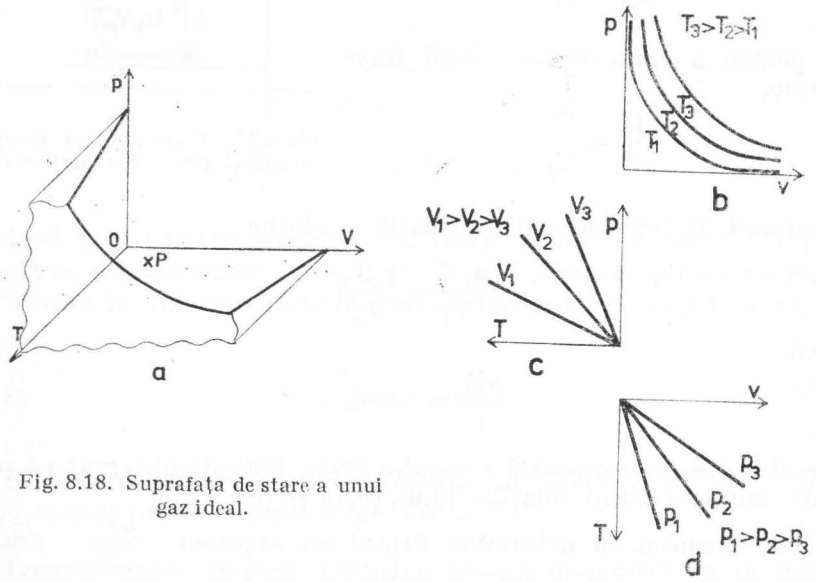


Fig. 8.18. Suprafaţa de stare a unui gaz ideal.

cu planul pV — dă izotermele cunoscute din figura 8.18, b, iar intersectată cu plane paralele cu planul pT, sau cu VT rezultă dreptele izocore şi, respectiv, izobarele din figurile 8.18, c şi 8.18, d.

8.8. Căldurile specifice la volum şi presiune constantă

Procesul de schimb de căldură se poate face în două moduri: la volum constant şi la presiune constantă. În consecinţă, este necesară definirea diferenţiată a căldurii specifice dată în relaţia

(8.4). *Căldurile specifice la volum constant* (c_V) şi la *presiune constantă* (c_p) se definesc prin

$$c_V = \frac{Q_V}{m\,\Delta T}, \quad c_p = \frac{Q_p}{m\,\Delta T} \tag{8.11}$$

măsurate în aceleaşi unităţi ca şi c.

Punînd $m = \nu \cdot M$, unde M este masa molară, se obţine:

$$mc_V = \nu M c_V$$

şi notînd $Mc_V = C_V$ capacitatea calorică la volum constant a unui mol, numită şi *căldura molară sub volum constant*, avem

$$mc_V = \nu C_V$$

respectiv, pentru presiune constantă

$$mc_p = \nu C_p$$

C_p fiind *căldura molară sub presiune constantă* ($C_p > C_V$)

Relaţia dintre C_p şi C_V numită relaţia lui Mayer este

$$C_p - C_V = R \tag{8.12}$$

unde R este constanta universală a gazelor.

În tabelul următor se dau căldurile molare pentru gazele ideale în $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\cdot \mathrm{K}}$

Gaze	C_V	C_p
monoatomice	12,5	20,8
biatomice	20,8	29,1
poliatomice	24,9	33,3

8.9. Calculul lucrului mecanic efectuat de un gaz ideal

Sistemul fiind gazul închis în cilindru cu un piston, lucrul mecanic efectuat de gaz într-o destindere foarte mică ΔV este

$$L = F \cdot \Delta x = p \ A\Delta x = p\Delta V. \qquad (8.13)$$

a) *Procesul izocor*. Pistonul va fi blocat. Deci $V = 0$, iar $L = 0$.

b) *Procesul izobar*. Presiunea fiind constantă, lucrul mecanic pentru o destindere oricît de mare între volumele V_1 și V_2 este $L = p\Delta V = p(V_2 - V_1)$

c) *Lucrul mecanic în procesul izoterm* desfășurat între volumele V_1 și V_2 și efectuat la temperatura T, este $L = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$.

d) *Procesul adiabatic* ($Q = 0$) între stările cu presiune p_1, V_1 și p_2, V_2

$$L = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{1 - \gamma}$$

unde $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ se numește *exponentul adiabatic*.

8.10. Primul principiu al termodinamicii

Izolînd un corp sau mai multe de mediul înconjurător sîntem conduși la a considera un anumit *sistem*. Acest sistem interacționează cu mediul înconjurător primind sau cedînd energie. Există. din punct de vedere termodinamic, două metode prin care se poate face acest lucru: prin schimb de căldură și prin efectuare de lucru mecanic. Prin acest schimb de energie sistemul își modifică în general vechea stare trecînd într-una nouă. În următorul exemplu se studiază transformarea stării unui sistem termodinamic.

Se consideră un gaz închis într-un cilindru printr-un piston (fig. 8.19). Acest sistem este delimitat de mediul înconjurător prin pereții cilindrului și prin piston. Fie starea inițială (*1*) a sistemului determinată de parametrii presiune (p_1), volum (V_1) și temperatură (T_1).

a) Pistonul fiind fixat, înlocuim unul din pereții termoizolanți printr-un perete conductibil și încălzim gazul punîndu-l în contact cu un corp mai cald; singura legătură cu mediul înconjurător se

face acum prin acest perete prin care sistemul primește căldură. Rezultă că starea sistemului se modifică: presiunea crește, volumul

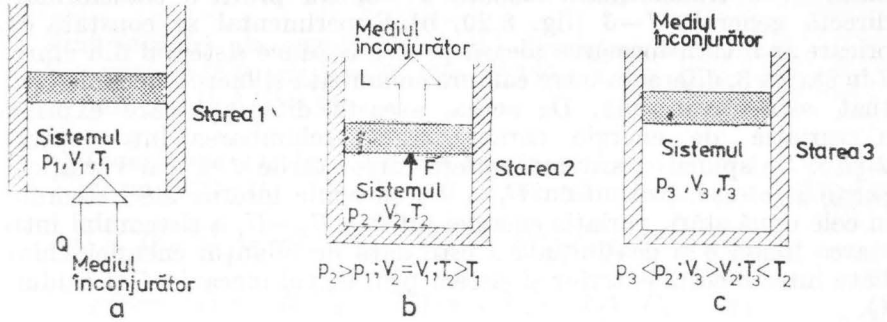


Fig. 8.19. Transformări între trei stări (1, 2 și 3) ale unui sistem.

rămîne același (transformarea izocoră), iar temperatura se ridică. Sistemul a primit căldura Q (starea 2).

b) Considerăm că pereții și pistonul sînt termoizolatori. Singurul contact cu mediul înconjurător se face prin intermediul pistonului împins de gazul care se destinde cu o forță $\vec{F}$, care își deplasează punctul de aplicație pe o distanță $\vec{d}$. Sistemul efectuează un lucru mecanic L. Starea sistemului se modifică, presiunea scade, volu-

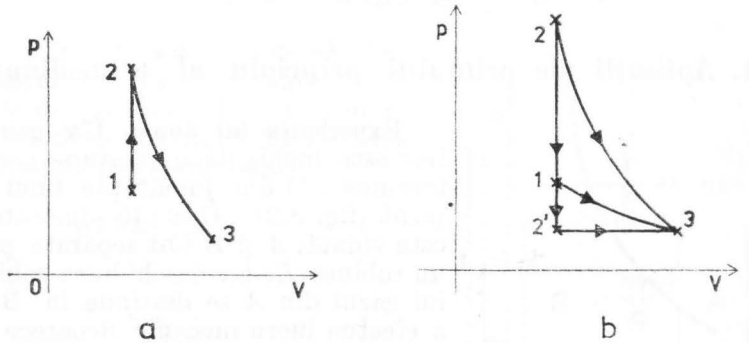


Fig. 8.2.0. a) Reprezentarea grafică a transformărilor reprezentate pe figura 8.19 și b) alte variante între aceleași stări.

mul crește, temperatura coboară. Reprezentarea grafică este dată în figura 8.20, a. Transformarea este adiabatică. Sistemul a ajuns în starea finală 3.

În transformările descrise s-au produs schimburi de energie cu mediul înconjurător.

Între cele două stări *1* și *3* sistemul poate fi adus prin transformări diferite, de exemplu, sau printr-o schimbare izocoră $1-2'$ urmată de o transformare izobară $2'-3$, sau printr-o transformare directă generală $1-3$ (fig. 8.20, b). Experimental se constată că, oricare ar fi transformarea aleasă pentru a aduce sistemul din starea *1* în starea 3, diferența între căldura schimbată și lucrul mecanic efectuat este invariabilă. De aceea, această diferență care exprimă o variație de energie caracterizează schimbarea între stările *1* și *3*. Se spune că sistemul suferă între stările *1* și *3* o variație a *energiei interne*. Notînd cu U_1 și U_3 energiile interne ale sistemului în cele două stări, variația energiei interne U_3-U_1 a sistemului între starea finală *3* și cea inițială *1* este dată de bilanțul energiei schimbate între mediul exterior și sistem prin lucrul mecanic L și căldura Q.

$$\Delta U = U_3 - U_1 = Q - L. \qquad (8.14)$$

Întrucît se poate primi sau ceda căldură și lucrul mecanic, se face o convenție de semn:

$Q > 0$, sistemul primește căldură
$Q < 0$, sistemul cedează căldură
$L > 0$, sistemul efectuează lucru mecanic
$L < 0$, asupra sistemului se efectuează lucru mecanic

Relația (8.14) exprimă primul principiu al termodinamicii:

8.11. Aplicații ale primului principiu al termodinamicii

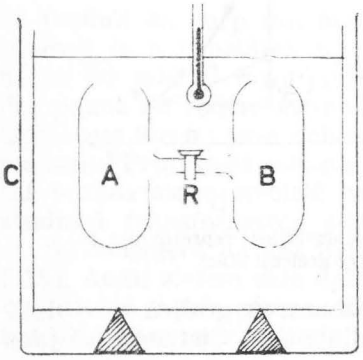


Fig. 8.21. Experiența lui Joule.

Experiența lui Joule. Un gaz perfect este închis la o presiune oarecare într-una (A) din jumătățile unui recipient (fig. 8.21). Cealaltă jumătate (B) este vidată. A și B sînt separate printr-un robinet R. La deschiderea robinetului gazul din A se destinde în B fără a efectua lucru mecanic deoarece în B presiunea este zero. Experimental se constată că temperatura în calorimetrul C nu se modifică, adică A și B nu schimbă căldură cu exteriorul. Aplicînd primul principiu și înlocuind $L = 0$, $Q = 0$ se obține

$$\Delta U = Q - L = 0.$$

Deci în transformarea unui gaz ideal produsă la temperatură constantă variația energiei interne este nulă. Rezultă că *energia internă a unui gaz ideal depinde numai de temperatură.*

Transformări ale gazului ideal. a) *Transformare izocoră.* S-a văzut (§8.9) că $L = 0$. Din (8.11) rezultă $Q_v = \nu C_v (T_2 - T_1)$ și din (8.14) $\Delta U = Q_v$

b) *Transformare izobară.* Lucrul mecanic fiind (§8.9) $L = p(V_2 - V_1)$ conform (8.11) $Q_p = \nu c_p(T_2 - T_1)$; rezultă aplicînd (8.14) și (8.10)

$$\Delta U = Q - L = \nu C_p (T_2 - T_1) - (pV_2 - pV_1) = \nu C_p(T_2 -$$

$$- T_1) - \nu R(T_2 - T_1) = \nu(T_2 - T_1)\ (C_p - R)$$

sau, aplicînd relația (8.12)

$$\Delta U = \nu(T_2 - T_1)C_V.$$

c) *Transformare izotermă.* Energia gazului ideal depinzînd exclusiv de temperatură $\Delta U = 0$ și conform primului principiu și relației din §8.9, punctul c,

$$Q = L = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

d) *Transformarea adiabatică.* Transformarea care se face fără schimb de căldură cu exteriorul se numește *adiabatică* (fig. 8.22). Ecuația unei transformări adiabatice

$$pV^\gamma = \text{const.}$$

unde

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}.$$

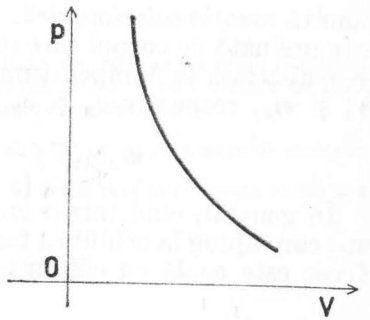


Fig. 8.22 Transformarea adiabatică.

În acest caz 8.14 dă

$$\Delta U = -L = \nu C_v(T_2 - T_1).$$

Ecuația calorimetrică. Două corpuri A și B aflate la temperaturi diferite (T_A, T_B) se găsesc într-o incintă izolată, de exemplu într-un

calorimetru (fig. 8.23). Variația energiei interne a sistemului alcătuit din A și B este nulă, deoarece $Q = 0$ și $L = 0$. Considerînd însă A și B ca sisteme diferite, unul (A) cedează căldură, iar celălalt (B) primește. Variația energiei pentru A este

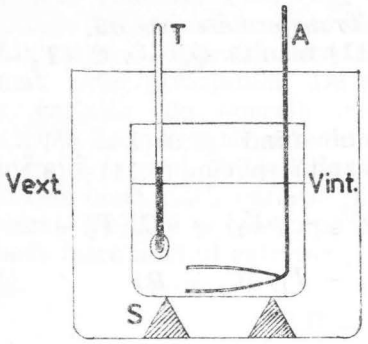


Fig. 8.23. Calorimetru : A — agitator ; T — termometru ; $V_{ext.}$ — vas exterior ; V_{int} — vas interior ; S, suporturi izolatoare.

$$\Delta U_A = -Q_A,$$

iar pentru B,

$$\Delta U_B = Q_B.$$

Variația energiei interne a întregului sistem este suma variațiilor energiilor interne ale părților

$$\Delta U = \Delta U_A + \Delta U_B = 0$$

sau

$$\Delta U_A = -\Delta U_B$$

și înlocuind cu căldurile schimbate se obține în valoare absolută egalitatea

$$Q_A = Q, \tag{8.15}$$

numită *ecuația calorimetrică*. Căldura cedată de corpul care se răcește este preluată de corpul care se încălzește. Astfel, dacă echilibrul termic se realizează la temperatura T, masele și căldurile specifice fiind m_A și m_B, respectiv c_A și c_B, ecuația calorimetrică se scrie

$$m_A c_A (T_A - T) = m_B c_B (T - T_B).$$

În general, cînd într-o incintă adiabatică se află mai multe corpuri care ajung la echilibru termic, căldura cedată de corpurile care se răcesc este egală cu căldura primită de corpurile care se încălzesc.

8.12. Puterea calorică a unui combustibil

Arderea unui combustibil clasic (cărbune, petrol) este o *reacție chimică exoenergetică*. Căldura obținută prin arderea completă a unei mase de 1 kg dintr-un combustibil oarecare se numește *putere*

calorică (q). Unitatea de măsură a puterii calorice este J/kg. Tabelul următor dă valoarea acestei mărimi pentru cîțiva combustibili, exprimată în MJ/kg :

Benzină	46	Cocs	30,3
Petrol lampant (kerosen)	43,1	Huilă	29—30
Motorină	42	Turbă	15
Gaz natural	35,5	Lemn uscat	8—10
Cărbune de lemn (mangal)	30—33		

Căldura Q cedată de m kg combustibil este deci

$$Q = mq. \tag{8.16}$$

Exemple. 1. Ce căldură este necesară pentru a ridica temperatura aerului dintr-o cameră ale cărei dimensiuni sînt 7 m, 5 m, și 3 m, de la 16°C, la 21°C dacă prin pereți se pierde 10% din această căldură? Se cunosc pentru aerul camerei $c = 1$ kJ/kg · K și $\rho = 1{,}28$ kg/m³.

Aplicînd relația (8.4'), căldura care trebuie primită pentru încălzire este $Q' = mc\Delta t = V\rho c\Delta t$. Aceasta reprezintă 9/10 din căldura Q necesară, 1/10 fiind transmisă prin pereți. Deci

$$9Q/10 = Q'$$

sau

$$Q = (10/9)\ V\rho c\Delta t = \frac{10}{9} \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1{,}28 \cdot 10^3 \cdot 5 = 746{,}7 \text{ kJ}.$$

2. Un cartuș cu masa de 40 g pătrunde cu viteza de 600 m/s într-un blindaj și se oprește. Procesul desfășurîndu-se rapid se consideră că nu se face schimb de căldură cu exteriorul. Să se calculeze variația energiei interne a glontelui.

Energia cinetică variază de la $Ec_0 = \frac{1}{2} mv^2$ la zero datorită lucrului mecanic de frînare efectuat de blindaj (mediu înconjurător). Aplicînd mai întîi relația (4.10) și apoi principiul întîi (8.14) se obține

$$L = \Delta E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \Delta U;$$

deci

$$\Delta U = \frac{1}{2} 40 \cdot 10^{-3} \cdot (6 \cdot 10^2)^2 = 7{,}2 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

3. Într-o cadă se amestecă 40 kg de apă (m_1) la temperatura $t_1 = 50$°C cu 20 kg de apă (m_2) la temperaura $t_2 = 10$°C. Care este temperatura finală θ a amestecului?

Căldura cedată de apa caldă este $Q_1 = m_1 c \cdot (t_1 - \theta)$, iar căldura primită de apa rece este $Q_2 = m_2 c\ (\theta - t_2)$. Rezultă

$$Q_1 = Q_2$$

sau

$$m_1 c t_1 + m_2 c t_2 = m_2 c \theta + m_1 c \theta,$$

de unde se calculează θ

$$\theta = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_2 + m_1} = \frac{40 \cdot 50 + 20 \cdot 10}{40 + 20} \cdot \frac{10^{-3}\ \text{kg} \cdot °\text{C}}{10^{-3}\ \text{kg}} = 36{,}6\ °\text{C}.$$

8.13. Obținerea temperaturilor joase

În instalațiile tehnice moderne se folosește metoda micșorării energiei interne a unui gaz prin destinderea acestuia. Gazul se destinde adiabatic efectuînd un lucru mecanic. Prin aceasta, temperatura gazului scade. Un exemplu care ilustrează procesul este formarea brumei pe capsula de CO_2 utilizată la autosifon. În figura 8.24 este reprezentată o mașină frigorifică cu compresor. Compresorul C pompează substanța de lucru, sub formă de gaz, împingînd-o în serpentina S, aflată într-o incintă I_1 răcită de un lichid. Supus

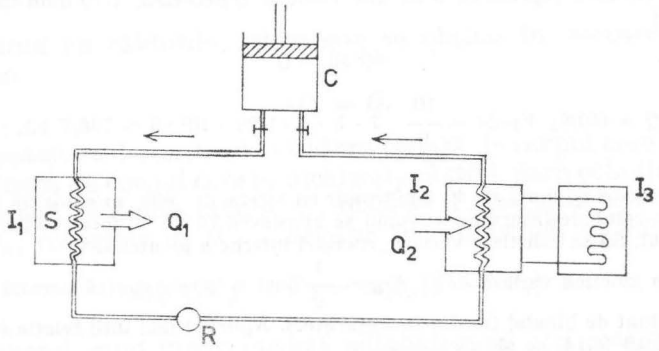


Fig. 8.24. Mașină frigorifică cu compresor.

unei presiuni mari și unei temperaturi joase gazul se lichefiază. Lichidul astfel format traversează robinetul R, trecînd de la o presiune ridicată la una scăzută, iar în incinta I_2 se vaporizează primind căldură de la un lichid al cărui punct de înghețare este coborît (−10°C−15°C). Acest lichid este pompat într-un circuit închis fiind trecut prin altă incintă I_3 care trebuie răcită. Gazul din circuitul principal revine în compresor reparcurgînd ciclul descris.

8.14. Gazul real

Substanțele reale aflate sub formă de gaz se comportă din ce în ce mai diferit de gazul ideal pe măsură ce presiunea crește și temperatura scade. Aceasta datorită faptului că presiunea crescînd începe să se manifeste interacțiunea moleculară, ceea ce conduce la modificarea a presiunii însăși, mărind-o. Trebuie de asemenea să se corecteze volumul ocupat de gaz, deoarece se ține seamă de faptul că din volumul ocupat trebuie să se scadă volumul propriu al moleculelor. Van der Waals a arătat că în ecuația de stare este necesar să se înlocuiască presiunea (p) și volumul molar (V_M) prin $\left(p + \frac{a}{V_M^2}\right)$ și, respectiv, $(V_M - b)$, unde a și b sînt constante care depind de natura gazului, b fiind legată de volumul propriu al moleculelor gazului. Ecuația de stare (8.10) devine, pentru un mol,

$$\left(p + \frac{a}{V_M^2}\right)(V_M - b) = RT. \tag{8.17}$$

Constantele a și b se determină experimental. Termenul a/V_M^2 se numește *presiunea internă*. În tabelul următor sînt incluse cîteva valori ale presiunii interne pentru aer:

presiunea externă	presiunea internă	
	temperatura	
	0°C	−75°C
10^5 N/m²	28 ·10 N/m²	56 ·10 N/m²
10^7 N/m²	26 ·10⁵ N/m²	84,5 ·10⁵ N/m²

Pentru un gaz în condiții normale de temperatură și presiune volumul propriu al moleculelor ajunge la 0,15% din volumul disponibil. Corecția adusă de ecuația (8.17) este valabilă într-un număr mare de cazuri. Nu există, totuși, nici o relație care să se aplice în general tuturor gazelor și în toate condițiile.

8.15. Teoria cinetico-moleculară a gazului ideal

Faptele experimentale sugerează următoarele ipoteze ale teoriei cinetice:

a) gazul este compus dintr-un mare număr de molecule;

b) moleculele sînt în continuă mișcare;

c) impulsul și energia cinetică se conservă în ciocnirile dintre molecule.

Difuzia gazelor este, de exemplu, un fapt din care se deduce că moleculele unui gaz sînt într-o mișcare rapidă. Deși fiecare moleculă are impulsul și energia ei cinetică, în totalitate există un rezultat mediu al interacțiunii moleculelor între ele și cu pereții vasului.

Mărimile care descriu starea unui gaz, cum sînt presiunea și temperatura apar ca un efect mediu al ciocnirilor moleculelor cu peretele vasului și respectiv al energiei cinetice a moleculelor.

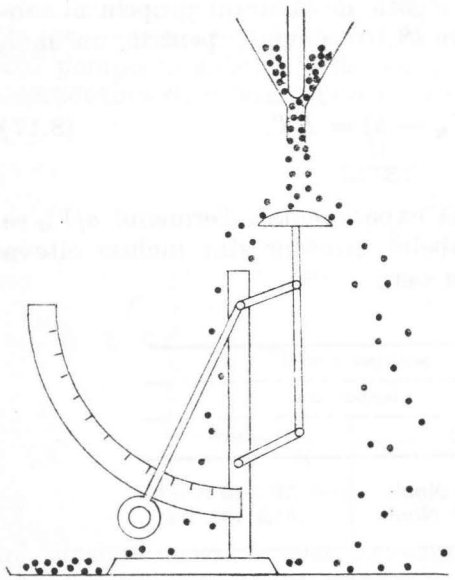


Fig. 8.25. Un model pentru a înțelege presiunea exercitată de un gaz pe un perete.

Faptul că presiunea poate fi considerată ca o mărime ce rezultă din ciocnirile moleculelor cu un perete se dovedește intuitiv prin modelul din figura 8.25. Deși bilele cad, în general, succesiv ele exercită asupra platanului cîntarului o apăsare constantă în timp.

Se stabilește că presiunea gazului este

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m\bar{v}^2}{2} \qquad (8.18)$$

unde n este numărul de molecule din unitatea de volum, m masa uneia dintre ele, iar $\overline{v^2}$ este egală cu media pătratelor vitezelor tuturor moleculelor din unitatea de volum:

$$\overline{v^2} = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}{n}.$$

Viteza termică v_T definită prin

$$v_T = \sqrt{\overline{v^2}}$$

este numită *viteză pătratică medie*.

Notînd cu N_t numărul total al moleculelor, cu N numărul de molecule dintr-un mol (numărul lui Avogadro) și cu n numărul de molecule din unitatea de volum, din ecuația de stare (8.10) se obține

$$p = \nu \frac{RT}{V} = \frac{N_t}{N} \frac{R}{V} T = n k T$$

și, comparînd cu (8.18),

$$\frac{1}{2} m\bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT, \qquad (8.19)$$

unde s-a notat cu $k = R/N$ *constanta lui Boltzmann* ($1{,}38 \cdot 10^{26}$ J/K).

Rezultă că energia medie este direct proporțională cu temperatura. Astfel, parametrul temperatură apare legat de agitația moleculară, iar relația precedentă poate fi folosită pentru definirea temperaturii gazului pe baza structurii microfizice. Urmează că

$$v_T = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \qquad (8.20)$$

M fiind masa molară. Relația (8.20) este valabilă pentru temperaturi absolute diferite de 0 K.

Exemplu. Aplicînd relația (8.20) se poate calcula viteza pătratică medie a moleculelor de oxigen la temperatura de 0°C:

$$v_T = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}310 \cdot 273}{0{,}032}} \approx 461 \text{ m/s}.$$

Între două ciocniri succesive molecula parcurge în linie dreaptă, cu viteză constantă un drum care variază de la o ciocnire la alta. Media acestei distanțe se numește *drum liber mijlociu* ($\bar{l}$). Se calculează de exemplu că la 0°C moleculele aerului aflat la presiunea de 1 atm drumul liber mijlociu este de aproximativ $2 \cdot 10^{-5}$ cm, cam 1000 de diametre moleculare, ceea ce înseamnă că molecula se ciocnește de $3 \cdot 10^9$ ori pe secundă. Iată o imagine a agitației termice la această temperatură!

8.16. Structura substanței

Rezultatele teoriei cinetico-moleculare aplicată la gaze sînt aproximativ exacte pentru gazul ideal, condiție îndeplinită de gazele reale care se află la presiuni nu prea mari, și deasupra punctului critic. În cazul în care presiunea crește și temperatura scade, comportarea gazului devine foarte diferită, și legile gazului ideal nu mai sînt valabile.

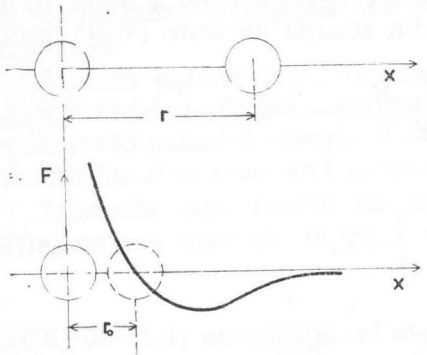


Fig. 8.26. Interacțiunea a doua molecule. Dacă $x < r_0$ forța este de atracție.

Particulele care alcătuiesc substanțe interacționează între ele. Graficul din figura 8.26 arată cum evoluează interacțiunea F între două molecule în funcție de distanța x dintre ele. Această comportare se menține în toate cazurile indiferent de natura moleculelor. Forțele care acționează între două molecule sînt de natură electrică. Aceste forțe sînt de aproximativ 10^{40} ori mai mari decît cele date de legea atracției universale, dar, practic, acționează pe distanțe extrem de mici. Atracția și repulsia se manifestă cînd distanța devine mai mare sau mai mică decît r_0, *distanță de echilibru* la care forța de interacțiune se anulează și care variază în funcție de natura moleculelor.

În gaze, distanța dintre molecule este mult mai mare decît r_0 și cu cît presiunea e mai mică se poate considera că forțele de interacțiune nu intervin decît în ciocniri, cînd distanța între molecule devine egală cu diametrul lor. În fazele condensate, lichidă și solidă, forțele dintre particulele componente devin importante, acestea formînd un sistem alcătuit astfel încît, particulele vecine aflîndu-se la distanțe de echilibru, întreg sistemul să aibă energie potențială minimă. Considerînd zone restrînse, lichidul și solidul au o structură în care un anumit aranjament al particulelor componente (*celula*) se reproduce alcătuind un cristal. În figura 8.27 sînt reproduse cîteva tipuri de celule, iar în tabelul următor sînt înscrise elementele care cristalizează în sistemele respective:

— sistem hexagonal compact (fig. 8.27, a): C, Be, Co, Hf, Zn, Zr;

— sistemul cubic cu fețe centrate (fig. 8.27, b): Al, Cu, Co, Fe, Au, Ge, Ni; Ti, C.

— sistemul cubic cu volum centrat (fig. 8.27, c) Cr, Fe, Li, Mo, Ta, Ti, U, V.

Cristalele sînt formate din atomi, molecule, ioni sau macromolecule, aceasta însemînnd că în nodurile rețelei cristaline sînt

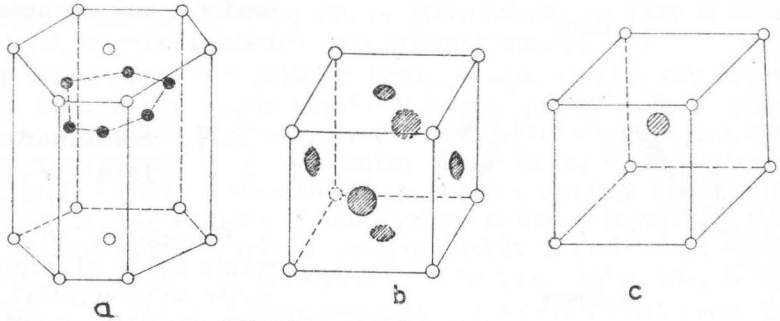


Fig. 8.27. Cîteva tipuri de celule elementare.

particulele amintite. Exemple din fiecare tip sînt respectiv metalele, elementele nemetalice (sulful), clorura de sodiu, diamantul. În substanțele amorfe particulele componente (moleculele) sînt înșiruite în lanțuri lungi împletite dezordonat.

Este de observat că unele elemente ca fierul și carbonul cristalizează în mai multe sisteme.

Natura forțelor care țin strîns legate particulele într-un sistem este diferită. Pe lîngă sistemele de forțe avînd ca efect coeziunea, trebuie luată în considerație agitația termică, datorită căreia în solid particulele din nodurile rețelei vibrează cu amplitudini cu atît mai mari cu cît temperatura este mai ridicată. O dovadă a acestei agitații este existența difuziunii observată la solide. O placă de plumb ținută timp îndelungat strîns alipită de o placă de aur poartă după separare urmele particulelor de aur.

Cu creșterea temperaturii noile poziții de echilibru se modifică, particulele distanțîndu-se, acesta avînd ca efect macrofizic *dilatarea*. La temperatura de topire căldura primită de solid este necesară pentru a desface legătura particulelor aranjate în cristal.

În momentul terminării topirii, din cristal nu mai există decît grupe mici de particule, încă legate în sisteme independente, dar care pot avea o deplasare relativă. Lichidul se prezintă astfel sub

forma unei faze în care există o ordine pe distanțe mici de cîteva diametre moleculare.

Pe măsură ce crește temperatura, agitația acestor grupe crește. În tot timpul se produce vaporizarea. La temperatura de fierbere energia primită produce vaporizarea în întreaga masă a lichidului, deoarece presiunea vaporilor saturanți din lichid devine egală cu aceea externă.

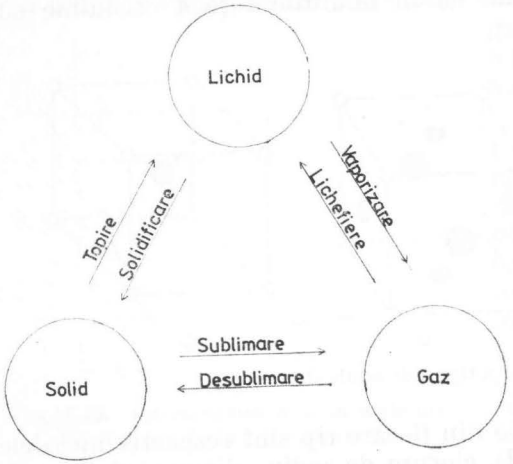


Fig. 8.28. Schimbări de fază. Schemă.

8.17. Schimbare de fază

Pe măsură ce temperatura scade și presiunea crește se produce o schimbare de fază, gazul trecînd într-o fază condensată, lichidă și apoi solidă. Denumirea transformărilor de fază este dată în figura 8.28. În orice stare, între parametrii presiune, volum și temperatură există o ecuație de stare și deci o suprafață p, V, T. Această suprafață are un aspect destul de complicat, motiv pentru care este mai ușor să se reprezinte proiecția suprafețelor pe planul pT și pV. În figurile 8.29 [,a și b

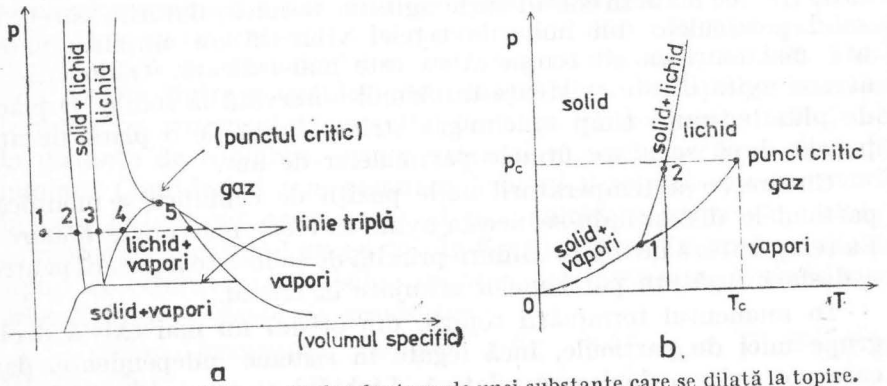


Fig. 8.29. Proiecțiile suprafețelor de stare ale unei substanțe care se dilată la topire.

sînt redate aceste proiecții. Curbele reprezintă locul punctelor pentru care presiunea și temperatura, respectiv presiunea și volumul specific* au astfel de valori la care fazele coexistă două cîte două sau la care se realizează transformarea dintr-o fază în alta. Fiecare substanță are o suprafață caracteristică. Există în general două tipuri de substanțe: unele care se dilată și altele care se contractă la topire. Pentru a înțelege aceste lucruri ne vom imagina că avem o substanță din prima categorie, în stare solidă, pe care o supunem unui șir de procese menite să-i schimbe starea.

Transformarea din solid în lichid și apoi în gaz, sau invers, se poate face în mai multe feluri: printr-un proces izobar, printr-un proces izoterm sau printr-unul combinat. Pentru simplificarea explicațiilor, vom urmări un proces izobar (fig. 8.29, a) și unul izoterm (fig. 8.29, b),1) Încălzind substanța la presiune constantă volumul crește de la *1* pînă ce se ajunge în *2*, unde primul cristal se topește fig. 8.29, a. Din *2* fazele solidă și lichidă coexistă pînă în *3*, unde toată substanța se află în stare lichidă. Încălzind în continuare substanța, se ajunge în punctul *4*, în care vaporii încep să se ridice din toată masa fluidului. În *5* toată substanța se află în stare de vapori. Prin răcire la presiune constantă substanța reparcurge transformările în sens invers.

Transformarea din stare gazoasă în lichidă și apoi în solidă se poate face și la temperatură constantă (fig. 8.29, b). Comprimîndu-l, gazul cedează căldura, iar la presiunea corespunzătoare punctului *1* apar primele picături de lichid, volumul continuînd să descrească fără ca presiunea să varieze, pînă ce toată substanța trece în stare lichidă. Mărind presiunea în continuare (*1→2*), în punctul *2* apar primele cristale. Volumul descrește presiunea rămînînd în tot timpul transformării constantă.

La substanțele din categoria a doua proiecțiile suprafeței de stare se prezintă ca în figurile 8.30. Rezultă unele comportări diferite care se pot observa trasînd izobare pe fig. 8.30, *a* sau izoterme pe fig. 8.30, *b*.

Pe figurile 8.29 *b* și 8.30, *b*, se poate vedea că stările lichidă și gazoasă (sau vaporii) pot coexista numai dacă temperatura și presiunea sînt mai mici decît valorile T_c și p_c numite *critice*. Un gaz nu poate fi transformat în lichid dacă temperatura și presiunea sînt menținute

* Volumul specific este raportul V/m dintre volumul V și masa m a substanței care ocupă volumul V.

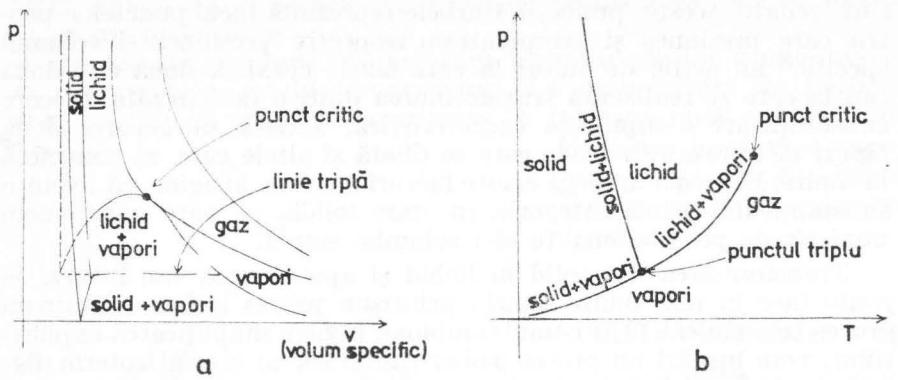


Fig. 8.30. Proiecțiile suprafeței de stare pentru o substanță care se contractă la topire.

la valori superioare valorilor critice. În tabelul următor se dau valorile critice pentru cîteva substanțe.

Substrat	Temperatura critică [K]	Presiunea critică [$10^5 \cdot N/m^2$]
He	5,25	2,3
H_2	33,2	13
N_2	126	34
O_2	154	51
H_2O	647	223

Este de observat că oxigenul, azotul, dar mai ales heliul și hidrogenul au temperaturi critice foarte joase, motiv pentru care lichefierea lor a constituit mult timp o problemă de nerezolvat.

Punctul de intersecție între curbele $S-V$, $V-L$, $S-L$ se numește *punct triplu* (fig. 8.29, b și 8.30, b). Acesta este proiecția liniei triple (fig. 8.29, *a* 8.29, b). De-a lungul acestei linii orizontale cele trei faze coexistă. Se arată că există o presiune și o temperatură determinată la care se produce acest fenomen. Pentru motivul arătat, punctul triplu al apei a fost ales (vezi § 8.1) ca punct fix de temperatură (273,16 K și 4,58 Torri).

Observație. Termenul vapori este utilizat pentru gaze la orice temperatură mai mică decît temperatura critică.

8.17.1. Topirea și solidificarea

În aceleași condiții, fiecare substanță cu o structură cristalină dată și pură se topește sau se solidifică la aceeași temperatură. Pentru o anumită substanță ambele procese se produc la o anumită temperatură. În tabelul următor este dată temperatura de topire (solidificare) la presiunea normală pentru cîteva substanțe, mărime caracteristică acestora.

Substanța	Temperatura de topire [°C]
Hidrogenul	−259
Azotul	−210
Mercurul	− 38,9
Gheața	0
Fosforul	44
Cositorul	232
Plumbul	327
Zincul	419
Alama	900
Aluminiul	659
Argintul	960
Aurul	1063
Cuprul	1084
Fierul	1530
Wolframul	3380

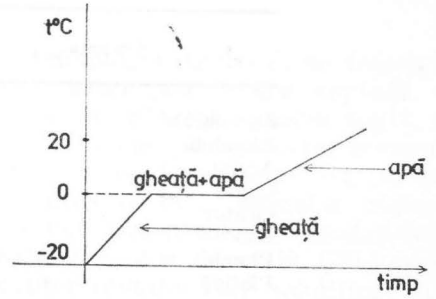


Fig. 8.31. Procesul topire-solidificare pentru apă.

Aliajele au temperaturi de topire caracteristice, dar diferite de acelea ale componentelor. De exemplu, să se compare alama cu componentele zinc și cupru. Temperatura de topire a unui aliaj alcătuit din anumite componente depinde de raportul lor în amestec. Conurile Seger, cu care se testează rapid și ușor temperatura cuptoarelor, sînt fabricate din substanțe a căror temperatură de topire se cunoaște. Topirea unuia indică atingerea acestei temperaturi.

Substanțele necristalizate nu au punct de topire bine definit, ci un interval de temperatură în care se produce o înmuiere treptată urmată de o creștere a fluidității.

Pentru a topi o substanță este necesară încălzirea ei. Solidificarea se face prin cedarea căldurii. Graficul desfășurării schimbării de fază topire-solidificare este dat în figura 8.31. În timpul topirii, din momentul apariției primei picături de lichid pînă la trecerea întregii substanțe în stare lichidă, temperatura nu se modifică, deși corpul este încălzit. Căldura primită (cedată) de unitatea de masă dintr-o

substanță pentru a trece complet la temperatura de topire (solidificare) în fază lichidă (solidă) este caracteristică unei substanțe și este numită *căldura de topire*

$$\lambda_t = \frac{Q}{m}. \tag{8.21}$$

Se observă că $[\lambda_t]$ = J/kg. Căldurile de topire la presiunea atmosferică ale cîtorva substanțe sînt înscrise în tabelul următor. Ele depind de presiunea la care se face schimbarea de stare.

Substanța	Căldura de topire [J/kg]
Apă-gheață	$334,4 \cdot 10^3$
Aluminiu	$321,86 \cdot 10^3$
Argint	$108,68 \cdot 10^3$
Cupru	$175,56 \cdot 10^3$
Cositor	$58,52 \cdot 10^3$
Fier	$204,82 \cdot 10^3$
Plumb	$20,9 \cdot 10^3$
Platină	$112,82 \cdot 10^3$

Exemplu. Ce căldură este necesară pentru topirea a 5 kg de cupru dacă temperatura lui inițială este de 84°C?

Temperatura de topire înscrisă în tabel este de 1084°C. Este necesară căldura $Q_1 = mc\Delta t$ și căldura $Q_2 = m\lambda_t$, pentru topirea cuprului, la temperatura de topire. Căldura totală este (v. și tabelul de la p. 252)

$$Q = Q_1 + Q_2 = mc\Delta t + m\lambda_t = m(c\Delta t + \lambda)_t =$$

$$= 5 \text{ kg } (395 \text{ J/kg} \cdot 10^3\text{K} + 175{,}56 \cdot 10^3 \text{ J/kg}) = 2852{,}80 \text{ kJ}.$$

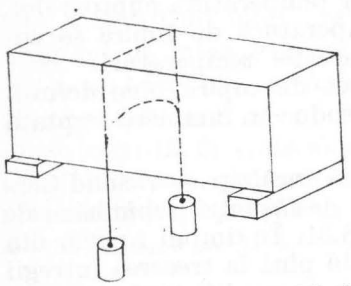


Fig. 8.32. Scăderea punctului de topire prin mărirea presiunii.

Observație. Există unele substanțe, ca apa de exemplu, care în stare solidă și la presiuni foarte mari prezintă mai multe forme de cristalizare. Numai la una din forme se observă că volumul gheței este mai mare decît al apei, aceasta fiind gheața obișnuită. Pentru astfel de substanțe creșterea presiunii duce la creșterea temperaturii de sublimare, dar temperatura de topire în loc să crească odată cu mărirea presiunii (ca în figura 8.29), scade.

Un experiment în această privință este descris în figura 8.32. Firul trece prin blocul de gheață fără să-l taie. Temperatura de topire a scăzut prin creșterea presiunii sub firul întins de cilindri. Ordinul de mărime al acestei variații este de aproximativ 10 miimi de grad pentru o creștere de 10^5 N/m², fapt care arată că explicația care se dă alunecării patinelor pe gheață prin scăderea temperaturii de topire la creșterea presiunii este falsă.

Un fapt important din natură explicat prin modificarea temperaturii de topire la creșterea presiunii este plasticitatea ghețarilor. De exemplu, imensa presiune a ghețurilor din regiunea centrală a Groenlandei determină împingerea ghețarilor către periferia insulei ceea ce provoacă fracturarea acestora la țărm și formarea icebergurilor uriașe.

8.17.2. Aplicații

Formarea unui monocristal. În tehnologia modernă se folosește procedeul de obținere a cristalelor mari prin topire treptată. O eprubetă suspendată vertical, în care se găsește metalul topit, se deplasează în interiorul unui mic cuptor de-a lungul axei acestuia. Pe măsură ce eprubeta coboară capătul ei de jos iese treptat din cuptor, iar metalul începe să se solidifice în jurul primelor cristale. Pe direcția axei se creează condițiile cele mai favorabile cristalizării. Ca atare, structura cristalelor așezate coaxial se dezvoltă. Cînd eprubeta a trecut în întregime prin cuptor metalul este solidificat sub forma unui monocristal. Această tehnologie este folosită pentru fabricarea cristalelor mari necesare la generatorii și detectorii de ultrasunete (vezi fig. 5.64), în industria ceasurilor pentru lagărele în care se rotesc fusele, la elementele semiconductoare etc.

Călirea oțelului. Existența diverselor varietăți ale unei aceleiași substanțe; posibilitatea transformărilor reciproce și determinarea întîrzierii producerii acestor transformări au consecințe practice esențiale pentru tehnologie.

Fierul formează la temperatura de 20°C cristale cu o structură cubică cu volum centrat. Cînd temperatura este ridicată aceiași atomi se rearanjează într-o rețea cubică cu fețe centrate (fig. 8.27). Ultimul este dur, iar primul este moale. Încălzind fierul moale la roșu, structura se modifică. La răcire, însă, sistemul de cristalizare se modifică în sens invers. Prezența unui adaus de 1% carbon întîrzie transformarea din sistem cubic cu fețe centrate în sistem cubic cu volum centrat. Pentru călire se încălzește oțelul la roșu și se introduce în apă sau în ulei. Structura specifică fierului dur se menține un interval de timp, îndelungat, practic nemărginit. Călirea este un exemplu de *tratament termic*.

Diamantul artificial. Răcind carbonul topit la presiunea înaltă se obține diamantul. Acest procedeu a putut fi utilizat pe scară industrială din 1955 după ce s-au realizat presiuni de peste 100 000 atm și la 2 300°C.

8.17.3. Vaporizare și lichefiere

Vaporizarea unui lichid se poate face în vid sau într-un gaz oarecare. Pentru vaporizare este necesară o energie care să permită moleculelor de lichid să se desprindă de forțele de legătură. Căldura necesară unității de masă dintr-o substanță pentru a trece complet în stare de vapori la o temperatură constantă se numește căldură latentă de vaporizare

$$\lambda_v = \frac{Q_v}{m} \Rightarrow [\lambda_v] = \frac{[Q_v]}{[m]} = \frac{\text{J}}{\text{kg}}. \qquad (8.22)$$

Vaporizarea în vid. În spațiul vidat de deasupra mercurului lichidul introdus în tub se evaporă rapid (fig. 8.33, a). Continuînd să vaporizăm lichidul, coloana de mercur coboară arătînd că presiunea crește (8.33, b). Această creștere durează pînă cînd lichidul nu se mai vaporizează complet (fig. 8.33, c). În acest stadiu vaporii sînt *saturanți*, lichidul și vaporii lui sînt în echilibru. Vaporizarea și lichefierea se produc în aceeași măsură.

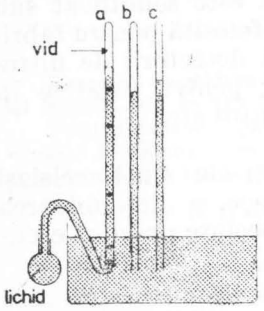


Fig. 8.33. Picăturile introduse cu o pipetă ajung să se vaporizeze în spațiul vidat (*a*). În (*b*) vaporii sînt nesaturați. În (*c*) s-a atins starea de saturație.

Cînd temperatura crește presiunea vaporilor saturanți este în creștere. În tabelul din josul paginii se dă această dependență pentru vapori de apă.

La o anumită temperatură presiunea vaporilor saturanți este caracteristică.

Pentru a se putea face o comparație se dau presiunile la temperatura de 10°C ale vaporilor saturanți ai apei și ai eterului care

t[°C]	0	10	20	30	50	100
p[10^2 N/m^2]	6,11	12,27	23,37	42,43	123,40	1013,6

sînt respectiv de 1223,6 N/m^2 și 38876 N/m^2. Întrucît la o anumită presiune vaporizarea se produce cu atît mai intens cu cît diferența între presiunea vaporilor lichidului este mai mare decît presiunea externă, înțelegem de ce eterul este mult mai volatil decît apa.

Vaporizarea într-un gaz oarecare. Dacă gazul aflat în vasul în care se vaporizează lichidul se află la presiunea p_1, iar p_2 este presiunea vaporilor saturanți la temperatura la care se face experiența,

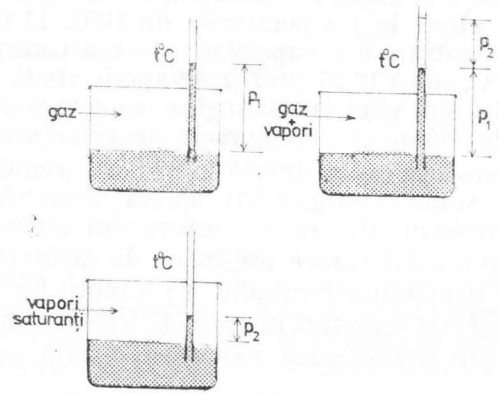


Fig. 8.34. Vaporizarea într-un gaz. Legea lui Dalton.

presiunea totală este $p = p_1 + p_2$ (legea lui Dalton). Presiunile p_1 și p_2 se numesc *parțiale* și sînt presiunile pe care le-ar avea gazul, respectiv vaporii saturanți, dacă ar ocupa singuri întreg spațiul pus la dispoziție (fig. 8.34). Pentru vaporizare este necesar ca presiunea vaporilor lichidului să fie mai mare decît presiunea p.

Aplicație. Cînd elicea unui vas se rotește în apă se creează o presiune foarte scăzută, ceea ce determină fierberea apei la temperatura scăzută. Bulele formate se sparg și provoacă deteriorarea suprafeței elicei (*cavitație*).

Evaporarea. În acest proces aerul nu stînjenește evaporarea. Prin difuziune vaporii din apropierea lichidului se răspîndesc în atmosferă, locul lor fiind luat de aer și de moleculele lichidului care continuă să se evaporeze astfel încît să se mențină presiunea vaporilor de la suprafață egală cu presiunea vaporilor saturanți la acea temperatură. Cum această presiune crește cu temperatura (vezi tabelul de la p. 280) evaporarea se intensifică odată cu creșterea temperaturii. Pe de altă parte, dacă printr-un mijloc oarecare se înlătură vaporii de la suprafață, alți vapori se vor forma și procesul este

activat. Din acest motiv uscarea se face mult mai rapid cînd la suprafața lichidului se produce un curent de aer.

8.17.4. Distilarea

Într-un spațiu în care *vaporii saturanți* se află la temperatură neuniformă, presiunea stării de saturație este cea care corespunde temperaturii cele mai joase. De exemplu, dacă într-o incintă se găsesc vapori de apă aflați la temperaturile de 10°C, 11°C și 12,5°C presiunea stării de saturație a vaporilor este cea corespunzătoare temperaturii de 10°C, adică $12{,}27 \cdot 10^2 \text{N/m}^2$ Vaporii aflați la temperaturile de 11°C și 12,5°C sînt supraîncălziți și se condensează. Acest fapt experimental este cunoscut sub numele de *principiul peretelui rece.*

O situație analogă se întîlnește în vaporii produși în balonul B care trec prin tubul T (fig. 8.35). Tubul, fiind răcit cu apa care curge prin manșonul M, are o temperatură mai scăzută. Vaporii devin suprasaturanți deoarece presiunea de saturație este aceea corespunzătoare temperaturii tubului T; vaporii se condensează pe pereții tubului și sînt colectați în vasul V. Transformarea lichidului L în vapori și apoi condensarea vaporilor în altă parte se numește *distilare.*

Dacă în balonul B se găsește un amestec de substanțe cu puncte de fierbere deosebite, componentele se pot separa. Mai întîi fierbe, transformîndu-se în vapori, substanța cu temperatura de fierbere mai joasă etc. De asemenea, se poate separa lichidul (de exemplu, apa distilată) de impuritățile dizolvate. Pentru obținerea unei purități mai mari este necesară distilarea repetată.

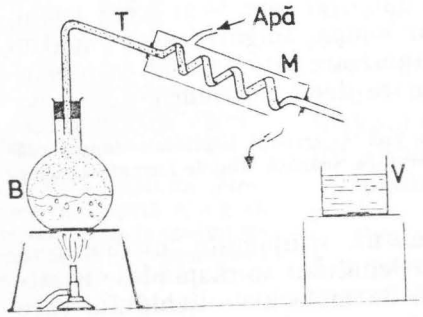


Fig. 8.35. Distilarea.

Exemplu. Într-un calorimetru de alamă cu masa $m_c = 200$ g conținînd masa de 1 kg de apă, în echilibru termic cu 0,5 g gheață, se toarnă 10 kg cositor topit la temperatura de 252°C. Cîtă apă se vaporizează cînd se atinge starea de echilibru finală (t_f)?

Pentru ca gheața, apa și vasul calorimetric să atingă temperatura de fierbere a apei este necesară căldura (pentru: λ_g, c_a, c_c; v. tabelele de la paginile 252, 278)

$$Q = m_g\ \lambda_g + (m_a + m_g)c_a t_f + m_c c_c t_f = 429{,}6\text{kJ}.$$

Căldura cedată de cositor prin răcire pînă la 100°C este

$$Q' = m_{Sn}\,\lambda_{Sn} + m_{Sn}c_{Sn}(t_{top} - t_f) = 941 \text{ kJ}.$$

Deci apa ajunge să fiarbă și se va vaporiza o cantitate de apă cu masa

$$m_v = \frac{Q' - Q}{\lambda_{v\,ap}} = 32 \text{ g}$$

8.17.5. Sublimarea și desublimarea

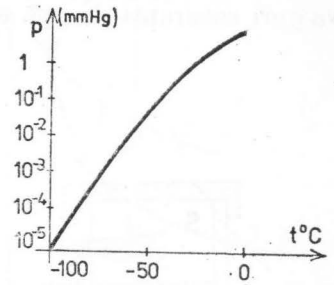


Fig. 8.36. Dependența de temperatură a presiuni vaporilor de apă la suprafața gheții.

Există multe substanțe la care trecerea din stare solidă în stare de vapori este evidentă. Naftalina se vaporizează la temperatura camerei, producînd mirosul caracteristic. Iodul și camforul sînt alte exemple cunoscute de toată lumea. Toate substanțele sublimează. La suprafața lor apare o presiune a vaporilor. În figura 2.36 este reprezentată dependența de temperatură a presiunii vaporilor de apă la suprafața gheții. La o anumită temperatură vaporii substanței și substanța solidă se află în echilibru; ambele procese, sublimarea și desublimarea, se produc simultan. Desigur, nu se poate mări mult presiunea vaporilor, deoarece prin creșterea temperaturii se ajunge la punctul de topire.

Uscarea rufelor iarna pe ger este un exemplu de sublimare a gheții.

8.17.6. Stări metastabile în schimbările de fază

Vaporii subrăciți, lichid supraîncălzit. Aceste stări se realizează cînd vaporii saturanți se găsesc la o anumită presiune sub temperatura corespunzătoare acestei stări, respectiv cînd lichidul se găsește la o temperatură superioară temperaturii la care trebuie să se afle în stare de vapori saturanți. În aceste cazuri vaporii se numesc subrăciți sau *suprasaturanți*, iar lichidul este supraîncălzit. Ambele stări sînt extrem de instabile.

Stabilitatea, relativ scurtă a vaporilor subrăciți, durează pînă cînd în spațiul ocupat apar centri de condensare care string rapid în jurul lor vapori.

Astfel, este suficient un simplu fulger (agent ionizant) pentru ca din atmosfera suprasaturată cu vapori să se pornească ploaia. Orașele cu atmosfera poluată sînt deseori prinse în ceață.

Aplicații importante ale acestor stări sînt *camera cu ceață* și *camera cu bule* instrumente importante în cercetarea atomului și nucleului.

Camera cu ceață. În spațiul S închis cu un piston P se află vapori saturanți de apă sau alcool (fig. 8.37, a). Dacă pistonul este

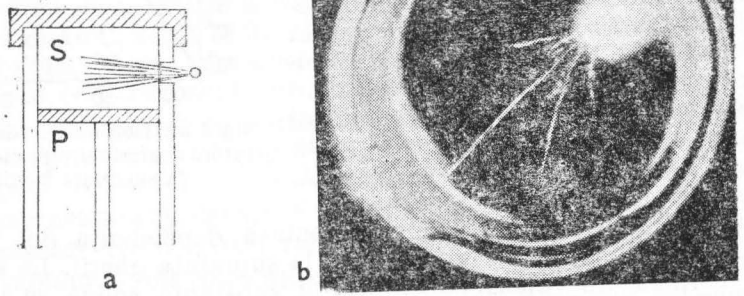


Fig. 8.37. Camera cu ceață.

retras brusc vaporii se destind, se răcesc și devin suprasaturanți. Dacă aerul este curățat de impurități nu se produce o condensare decît cînd apar centrii de condensare care sînt ionii produși de o particulă care traversează spațiul S. Traiectoria particulei devine vizibilă prin picăturile de apă care se formează în jurul ionilor generați (fig. 8.37, b).

Camera cu bule. Ionii produși de o particulă care traversează o incintă în care se găsește lichid supraîncălzit determină centri de fierbere rapidă. Vaporii rezultați fac vizibilă traiectoria sub forma unei linii alcătuită din bule conținînd și acești vapori.

8.18. Principiul doi al termodinamicii

O transformare la care starea finală este aceeași cu starea inițială se numește *ciclică*. Între transformările ciclice o importantă teoretică deosebită îl are *ciclul Carnot*, care constă într-un șir de patru transformări ale substanței de lucru, considerată un gaz ideal: două izoterme și două adiabate (fig. 8.38). Toate transformările sînt considerate *reversibile*. Parcurgerea ciclului se poate face într-un sens sau în sens invers. În sensul orar se parcurg următoarele etape: *(1—2)* — gazul se destinde izoterm la temperatura T_1; primește de la sursa caldă căldura Q_1 și efectuează lucrul mecanic L_{12}; *(2—3)* — gazul se destinde adiabatic și efectuînd lucrul L_{23} se răcește pînă la T_2. *(3—4)* — mediul efectuînd lucrul L_{34}, gazul este comprimat izoterm și cedează căldura Q_2; *(4—1)* — asupra substanței de lucru se efectuează lucrul L_{41} și, în condițiile unei transformări adiabatice, temperatura crește din nou la T_1.

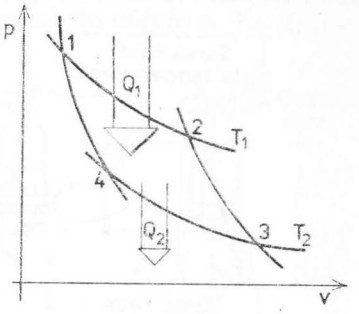


Fig. 8.38. Ciclul Carnot.

O mașină care transformă energia internă în energia mecanică și invers se numește *mașină termică*. O mașină termică care funcționează, de exemplu, după ciclul Carnot în sensul *1—2—3—4—1* primind căldură și efectuînd lucrul mecanic se numește *motor termic*. Mașina termică în care substanțe de lucru parcurge ciclul invers se numește *mașină frigorifică*.

Randamentul unei mașini termice care lucrează după ciclul Carnot este

$$\eta = \frac{\text{lucrul net}}{\text{căldura primită}} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \qquad (8.23)$$

Se demonstrează că

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \qquad (8.23')$$

Randamentul este subunitar. Sadi Carnot a arătat că randamentul oricărei mașini reversibile care lucrează între aceleași temperaturi T_1 și T_2 este egal cu $1 - \frac{T_2}{T_1}$ și nici o mașină ireversibilă lucrînd între aceleași două temperaturi nu poate avea randamentul mai mare.

Schema transformărilor într-un motor termic este arătată în figura 8.39.

O parte din căldura primită de la sursa caldă (T_1) este cedată sursei reci (T_2) restul fiind convertită în lucrul mecanic. Parcurgînd ciclul în sens invers, asupra substanței de lucru se efectuează din

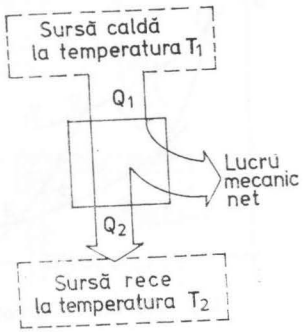


Fig. 8.39. Transformări energetice într-un motor.

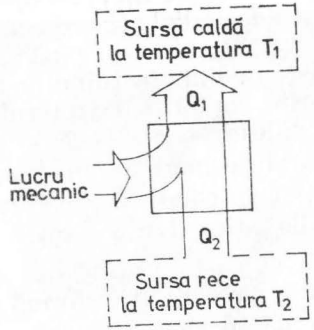


Fig. 8.40. Transformări energetice într-o mașină frigorifică.

exterior un lucru mecanic $Q_1 - Q_2$, se ia căldura Q_2 de la sursa rece și se cedează sursei calde căldura Q_1 (fig. 8.40). Mașina funcționează astfel ca o mașină frigorifică.

Experiența arată că nici o mașină ciclică nu poate funcționa avînd ca singur efect acela de a lua căldură de la un corp și a o transfera altui corp aflat la o temperatură mai mare.

Această afirmație constituie *principiul doi al termodinamicii*.

Exemplu. O mașină termică funcționează după ciclul Carnot între temperaturile 27°C și 227°C și efectuează pe ciclu un lucru mecanic de 0,4 kJ. Să se calculeze : a) randamentul ; b) căldura primită de la sursa caldă, căldura cedată sursei reci.

a) $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300}{500} = \frac{2}{5} = 0{,}4\ (40\,\%)$.

b) Căldura primită de la sursa caldă este

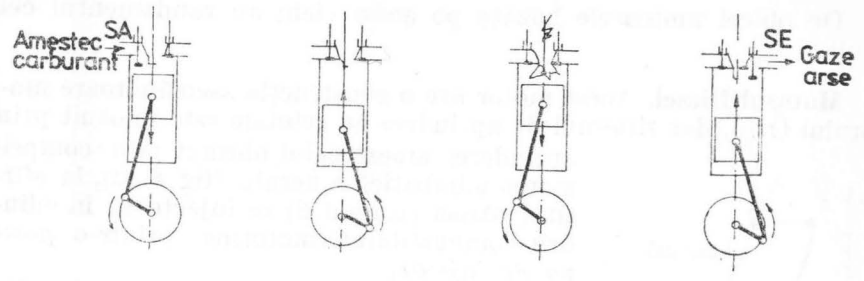
$$Q_1 = \frac{L}{\eta} = \frac{400\,\text{J}}{0{,}4} = 1000\ \text{J}$$

c) Căldura cedată sursei reci este

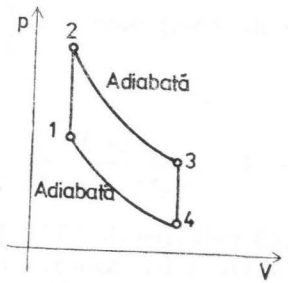
$$Q_2 = Q_1 - L = 1000\ \text{J} - 400\ \text{J} = 600\ \text{J}$$

8.19. Motorul cu ardere internă

Motorul cu aprindere prin scînteie funcționează în patru timpi (fig. 8.41, a) după *ciclul Otto* (fig. 8.41, b) alcătuit din două adiabate și două izocore. În primul timp supapa de admisie este deschisă amestecul de aer și vapori de benzină pătrunde în cilindru. La timpul



a



b

Fig. 8.41. a) Cei patru timpi ai unui motor Otto și b) transformarea ciclică corespunzătoare. (*SA*-supapa de admisie *SE*-supapa de evacuare.)

următor pistonul revine spre punctul mort interior, comprimînd amestecul. Scurt timp înainte de a ajunge la acest punct se produce o scînteie între electrozii bujiei. Vaporii de benzină se aprind și ard rapid mărind brusc presiunea în cilindru. Pistonul este împins prin destinderea amestecului carburant (timpul *3*). La sfîrșitul timpului *3* supapa de evacuare se deschide, gazele arse părăsind cilindrul. Ciclul se reia. Se observă că singurul timp motor este 3, mișcarea pistonului fiind asigurată în timpii *1*, *2* și *4* de energia volantului, primită în cursul timpului *3* (în cazul motorului cu un cilindru).

Amestecul carburant este dozat în *carburator*. Randamentul ciclului Otto este

$$\eta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}$$

unde $\varepsilon = V_4/V_1$ este raportul de compresie. Luînd $\varepsilon = 6$ și $\gamma = 1{,}40$ se obține

$$\eta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{1,4-1}} = 51\%.$$

De obicei motoarele bazate pe acest ciclu au randamentul cel mult 40%.

Motorul Diesel. Acest motor are o construcție asemănătoare motorului Otto, dar sistemul de aprindere cu scînteie este înlocuit prin aprinderea amestecului obținut prin comprimarea adiabatică a aerului (fig. 8.42), la sfîrșitul căreia (timpul *2*) se injectează în cilindru combustibilul (motorina) printr-o *pompă de injecție.*

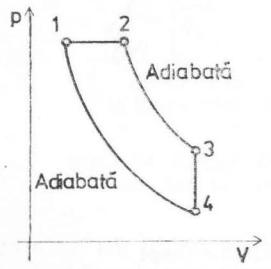


Fig. 8.42. Ciclul transformărilor în motorul Diesel.

Randamentul ciclului Diesel în funcție de rapoartele de compresie $\varepsilon = \frac{V_4}{V_1}$ și $\rho = \frac{V_2}{V_1}$ este

$$\eta = 1 - \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma\varepsilon^{\gamma-1}(\rho - 1)}$$

și are pentru $\varepsilon = 10$, $\rho = 2$ și $\gamma = 1{,}40$ valoarea de 53%, în general mai mare decît randamentul motorului Otto. În realitate, nici motorul Diesel nu are un randament mai mare de 44%. Motorul Diesel este în general un motor de putere mare.

Control științific: Prof. dr. GEORGE C. MOISIL
Redactor: NATALIA FIUCIUC
Tehnoredactor: ELENA GERU

Bun de tipar 25.IV 1983. Format 16/61×86.
Coli de tipar 18. C.Z. 53.621.030

C. 772 — I. P. „INFORMAȚIA"
Str. Brezoianu Nr. 23—25,
București